

Д. И. БЛОХИНЦЕВ

АКУСТИКА НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.32
Б 70
УДК 534.2

БЛОХИНЦЕВ Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. — 2-е изд. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

Монография является одной из основополагающих работ по акустике неоднородной движущейся среды. Книга вышла первым изданием в 1946 г., однако многие ее разделы не потеряли актуальности. Второе издание повторяет книгу без изменений; замеченные опечатки исправлены.

Изложены теоретические основы акустики движущейся среды, распространения звука в атмосфере, рассмотрены вопросы работы приемников звука в потоке.

Рис. 57, табл. 1, библи. 55 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
Предисловие к первому изданию	7
Глава I. Уравнения акустики неоднородной и движущейся среды	9
§ 1. Очерк аэродинамики сжимаемого газа	9
§ 2. Уравнения акустики в отсутствие ветра	16
§ 3. Энергия и поток энергии в акустике	21
§ 4. Распространение звука в движущейся и неоднородной среде	26
§ 5. Уравнение для распространения звука в постоянном потоке	35
§ 6. Обобщенная теорема Кирхгофа	38
Глава II. Распространение звука в атмосфере и воде . . .	44
§ 7. Геометрическая акустика	44
§ 8. Простейшие случаи распространения звука	51
§ 9. Распространение звука в реальной атмосфере. Зоны молчания	54
§ 10. Турбулентность атмосферы	56
§ 11. Флюктуация фазы звуковой волны из-за турбулентности атмосферы	64
§ 12. Рассеяние звука в турбулентном потоке	70
§ 13. Распространение звука в среде сложного состава, в частности в соленой морской воде	77
Глава III. Движущийся источник звука	84
§ 14. Волновое уравнение в произвольно движущейся системе координат	84
§ 15. Источник звука, движущийся равномерно, с дозвуковой скоростью	86
§ 16. Источники звука, движущиеся произвольным образом, но с дозвуковой скоростью	91
§ 17. Общая формула для эффекта Доплера	96
§ 18. Звук винта самолета	99
§ 19. Особенности движения при сверхзвуковой скорости. Скачки уплотнения	107

§ 20. Источник звука, движущийся со сверхзвуковой скоростью и имеющий малое лобовое сопротивление	114
§ 21. Звуковое поле источника звука при сверхзвуковой скорости движения	120
Г л а в а IV. Возбуждение звука потоком	127
§ 22. Общие сведения о вихревом звуке и вихреобразовании	127
§ 23. Теория вихревой дорожки Кармана. Вычисление частоты вихреобразования	136
§ 24. Псевдозвук. Условия излучения звука потоком . .	143
§ 25. Вихревой звук при обтекании длинного цилиндра или пластинки	149
§ 26. Замечания о вихревом шуме винтов	156
§ 27. Возбуждение резонаторов потоком	158
Г л а в а V. Работа приемника звука, помещенного в поток	169
§ 28. Физические явления при обтекании приемника потоком	169
§ 29. Ветрозащита приемника звука от вихреобразования	176
§ 30. Ветрозащита приемника звука от пульсаций скорости набегающего потока	184
§ 31. Приемник звука, движущийся со скоростью, значительно меньшей скорости звука	188
§ 32. Приемник звука, движущийся со скоростью, превышающей скорость звука	192
Литература	202
Предметный указатель	204

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В последние годы в науке сформировалось новое самостоятельное направление, получившее название аэроакустики. Зародившаяся на стыке двух наук — аэродинамики и классической акустики, она связана с проблемами акустики движущейся газовой среды, с вопросами аэродинамической генерации звука, подход к которым в трудах классиков естествознания — Гельмгольца, Кирхгофа и Рэлея — был только намечен. Возросшее внимание к этим вопросам, помимо внутренней логики развития науки, обусловлено потребностью в создании необходимой научной основы решения важной для здоровья всех людей проблемы — борьбы с шумом. Беспрецедентное развитие транспорта в последние десятилетия, и в первую очередь авиации с ее мощными силовыми установками, сопровождается постоянным ростом зашумленности окружающей среды, особенно в городах и районах, прилегающих к аэропортам. Проблема снижения шума сейчас стала частью общечеловеческой программы борьбы за чистоту окружающей среды.

Разработка практических методов снижения шума в авиации потребовала тщательного изучения аэродинамической генерации звука и распространения аэрошумов. На этом пути были достигнуты значительные успехи, которые отражены в большом числе научных публикаций. Часть результатов изложена в ряде обзоров и монографий, например: М. Е. Goldstein, «Aeroacoustics» (New York, 1976); Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А., «Аэродинамические источники шума» (Москва, «Машиностроение», 1981). Говоря о продвижении, достигнутом в настоящее время в аэроакустике, необходимо отметить,

что пионерские работы в этой области были сделаны советскими учеными, и в первую очередь Д. И. Блохинцевым.

Д. И. Блохинцев перед и во время Великой Отечественной войны активно занимался изучением возникновения звука в потоке и распространения звука в атмосфере. Его работы в этой области принесли большую пользу при разработке комплексов для обнаружения вражеских самолетов. Теоретическую часть своей работы Д. И. Блохинцев опубликовал в 1946 г. в книге «Акустика неоднородной движущейся среды». Книга получила широкую известность у нас и за рубежом, она была переведена на английский язык.

В книге впервые изложены теоретические основы акустики движущейся среды, распространения звука в атмосфере, рассмотрены вопросы работы приемников звука в потоке. Полученное Д. И. Блохинцевым уравнение распространения звука в произвольном неоднородном потоке явилось в дальнейшем базой для решения задач по генерации звука потоком и определению затухания звука в каналах с импедансными стенками.

В последние годы своей жизни Д. И. Блохинцев возвратился к проблемам аэроакустики и решил переиздать свою книгу с учетом последних достижений в области аэроакустики. К сожалению, неожиданная смерть помешала ему осуществить этот замысел. Учитывая, что книга Д. И. Блохинцева не потеряла своей актуальности и сейчас и выводы ее широко используются специалистами в практической деятельности, было решено, исправив замеченные опечатки, переиздать ее без изменения, как одну из фундаментальных работ в области аэроакустики.

Академик Г. П. Свищев

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Практические проблемы, вызванные Великой Отечественной войной, порождали проблемы теоретические.

Естественно, что в акустике интересы сосредоточивались вокруг проблем распространения звука в неоднородной и движущейся среде, так как именно такие среды представляют собой атмосфера, вода морей и рек, а также вокруг проблем и задач, связанных с движущимися источниками и приемниками звука. Эти проблемы являются смежными; они лежат на границе между акустикой и гидродинамикой в широком смысле слова.

Между тем выяснилось, что именно эти стороны дела либо слабо разработаны теоретически и экспериментально, либо мало популярны среди акустиков. Это обстоятельство и вызвало появление этой книги, посвященной теоретическим основам акустики движущейся и неоднородной среды. Эксперименты рассматриваются в ней лишь с точки зрения иллюстрации или подтверждения того или иного теоретического изложения или вывода.

Что же касается выбора теоретических вопросов и их освещения, то книга ни в коей мере не претендует на полноту. Выбор материала в значительной мере продиктован собственными исследованиями автора, частью опубликованными ранее, частью впервые приводимыми здесь. Некоторые вопросы не разобраны до конца, а только намечены. Тем не менее, автор нашел возможным поме-

стить в книге и их, рассчитывая на внимание и творческий интерес, которые они могут вызвать к себе со стороны работающих в области теоретической акустики.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Н. Н. Андрееву и С. Н. Ржевкину, ознакомившимся с рукописью этой книги, за полезные советы и указания, а также Л. Д. Ландау, обсуждение с которым помогло выяснению ряда вопросов.

Д. И. Блохинцев

Физический институт
АН СССР им. П. Н. Лебедева

УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ НЕОДНОРОДНОЙ
И ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

§ 1. Очерк аэродинамики сжимаемого газа

Среда, в которой распространяется звук, будь то газ, жидкость или твердое тело, имеет атомистическую структуру. Однако если частота звуковых колебаний не очень велика, то этот атомизм среды может быть игнорирован.

Для газа можно показать [1], что если $f \ll 1/\tau$, где f — частота колебаний, а τ — время свободного пробега между столкновениями, то газ можно рассматривать как сплошную среду, характеризуемую некоторыми постоянными. Такой метод рассмотрения принят в аэродинамике и в теории упругости. Игнорируя атомизм среды, мы не можем вполне строго и безупречно рассчитать явление дисперсии звука. К счастью, в большинстве практических вопросов дисперсия звука не имеет большого значения. Поэтому в этой книге мы не будем касаться явлений, требующих учета атомизма среды, и положим в основу теоретического анализа проблемы акустики движущейся среды уравнения аэродинамики сжимаемого газа.

Мы обратимся теперь к этим уравнениям, не предполагая пока никаких специфических для акустики ограничений (как то: большая частота и малая амплитуда колебаний). Уравнения аэродинамики сжимаемого газа выражают три фундаментальных закона сохранения: 1) закон сохранения вещества, 2) закон сохранения импульса и 3) закон сохранения энергии. Чтобы формулировать эти законы, выберем некоторую систему координат x, y, z , неподвижную относительно невозмущенной среды. Пусть, далее, t — время, v — скорость газа в этой системе ($v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z$ суть компоненты v по осям Ox, Oy, Oz соответственно), ρ — плотность газа. В этих обозначениях закон сохранения вещества, выра-

жаемый математически уравнением непрерывности, запишется в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0, \quad (1.1)$$

где суммировано по $k=1, 2, 3$. Вектор $\rho \mathbf{v}$ есть вектор плотности потока вещества. Это уравнение утверждает, что изменение количества вещества в любом малом объеме равно потоку вещества через поверхность, окружающую этот объем.

Вектор $\rho \mathbf{v}$ можно рассматривать также как вектор плотности импульса. Изменение импульса в любом малом объеме должно равняться количеству импульса, переносимого движением жидкости через поверхность, окружающую этот объем, плюс приложенную к объему силу.

Поток импульса, обусловленный переносом импульса, есть тензор с компонентами $\rho v_i v_k$ ($i, k=1, 2, 3$). Объемные силы мы будем считать отсутствующими. Поэтому сила, приложенная к объему, равна результирующей напряжений, приложенных к поверхности объема. Тензор этих напряжений обозначим через T_{ik} . Он складывается из скалярного давления p и вязких напряжений s_{ik} :

$$T_{ik} = p \delta_{ik} - s_{ik}, \quad (1.2)$$

где $\delta_{ik}=1$, если $i=k$, и $\delta_{ik}=0$, если $i \neq k$.

В применении к малому объему закон сохранения импульса может быть теперь написан в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} + \rho v_i v_k) = 0; \quad (1.3)$$

$i, k=1, 2, 3$ и опять суммируется по $k=1, 2, 3$.

Уравнение сохранения энергии должно выражать тот факт, что изменение полной энергии в малом объеме, складывающейся из кинетической энергии и внутренней энергии единицы объема газа, равно потоку кинетической и внутренней энергии через поверхность, окружающую этот объем, тепловому потоку через эту же поверхность плюс работа напряжений, совершаемая над этим объемом. Часть вектора потока энергии, обусловленная переносом кинетической энергии $\rho v^2/2$ и внутренней ρE (E — энергия единицы массы газа), есть $\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho E \right) \mathbf{v}$; если вектор

потока тепла обозначим через $S(S_1, S_2, S_3)$, то, применяя закон сохранения к малому объему, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho E \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho E \right) v_k + S_k \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i T_{ik}) = 0, \quad (1.4)$$

где суммировано по i и $k=1, 2, 3$. Последний член дает работу напряжений (на единицу объема). Для изотропной однородной жидкости (или газа) напряжения s_{ik} связаны с деформациями v_{ik} , согласно Ньютону, соотношениями¹⁾

$$s_{ii} = 2\mu v_{ii} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad s_{ik} = 2\mu v_{ik}, \quad (1.5)$$

где μ — вязкость газа и v_{ik} — тензор деформаций:

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.6)$$

Величина γ может быть написана в форме $\gamma = \mu' - \frac{2}{3}\mu$, где μ' — так называемый второй коэффициент вязкости (см. [1]). Этим коэффициентом учитывается превращение энергии макроскопического движения газа в энергию внутренних степеней свободы молекулы (вращение молекул), что имеет заметное значение лишь для ультразвуковых частот. Поэтому в большинстве случаев можно считать $\mu' = 0$ и $\gamma = -\frac{2}{3}\mu$ (значение, принятое в теории Стокса).

Поток тепла S выражается через градиент абсолютной температуры T :

$$S_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad \lambda = \rho c_v \chi, \quad (1.7)$$

где χ есть коэффициент теплопроводности газа, c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме.

К выписанным нами трем основным законам гидродинамики (1.1), (1.3) и (1.4) следует еще присоединить

¹⁾ Этот вид v_{ik} следует из предположений об изотропности и однородности газа или жидкости, если допускать линейную связь между тензором напряжений s_{ik} и деформациями v_{ik} .

уравнение состояния газа (или жидкости), связывающее давление p , плотность ρ и температуру T :

$$p = Z(\rho, T). \quad (1.8)$$

Уравнения (1.1), (1.3) и (1.4) позволяют дать рациональное определение потоку вещества L , потоку импульса, представляемому тензором M_{ik} , и потоку энергии N , который, подобно потоку вещества, может быть записан в векторной форме. Это определение будет таково, что дивергенция потока, взятая с обратным знаком, должна равняться производной по времени от плотности соответствующей величины. Таким путем мы получаем из (1.1) для потока вещества (он же — плотность импульса):

$$L = \rho v. \quad (1.9)$$

Из (1.3), подставляя туда значение s_{ik} из (1.5), найдем тензор потока импульса:

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \rho v_i^2 + p + \gamma \operatorname{div} v - 2\rho v_{ii}, \\ M_{ik} &= \rho v_i v_k - 2\rho v_{ik} = M_{ki}, \quad i \neq k, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где по-прежнему $i, k = 1, 2, 3$.

Здесь члены вида ρv_i^2 , $\rho v_i v_k$ дают поток импульса, обусловленный переносом импульса движением жидкости, а члены, содержащие p , μ , γ — поток импульса, обусловленный действием сил давления и вязких напряжений.

Наконец, из уравнения (1.4), подставляя туда s_{ik} из (1.5), получаем поток энергии:

$$\begin{aligned} N &= \left(\rho \frac{v^2}{2} + pE \right) v + S + p v + \\ &+ \mu \{ \nabla v^2 + [\operatorname{rot} v, v] \} + \gamma \operatorname{div} v \cdot v. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Первый член дает поток энергии, вызванный переносом энергии движением жидкости, второй (S) дает поток тепла, член $^1) p v$ и члены с μ и γ дают части потока энер-

¹⁾ Вектор $N = \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) v$, представляющий поток энергии для идеальной, несжимаемой жидкости, называют вектором Н. Умова [3].

гии, обусловленные работой сил давления и вязких напряжений.

Основные уравнения могут быть также написаны в векторной форме. Для этого достаточно подставить в уравнения (1.3) и (1.4) значение тензора T_{ik} из (1.2) и (1.5), уравнение же (1.1) переписывается сразу, и мы получаем:

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.3), если воспользоваться еще (1.12), может быть написано в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.13)$$

где ∇ есть символ градиента, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$. Величина $d\mathbf{v}/dt$ есть полная производная скорости по времени и равна

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{v}]. \quad (1.14)$$

Уравнение энергии (1.4), опять-таки с помощью (1.12), получает форму

$$\rho \frac{dE}{dt} = \lambda \Delta T + Q - p \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.15)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) E, \quad (1.15')$$

где Q есть диссипативная функция:

$$Q = \sum_{i,k=1}^3 s_{ik} v_{ik}. \quad (1.16)$$

Если уравнение (1.15) разделить на ρ , то его можно толковать таким образом, что изменение энергии единицы массы dE/dt равно потоку тепла $(\lambda/\rho) \Delta T$, количеству тепла, выделенного работой вязких сил Q/ρ , и работе сил давления $(-p \operatorname{div} \mathbf{v})/\rho$.

Нетрудно также пояснить это уравнение с точки зрения термодинамики. Согласно первому закону термодинамики для единицы массы вещества имеем:

$$dE = T dS - p dV, \quad (1.17)$$

где E — энергия единицы массы, S — ее энтропия, p — давление и V — удельный объем ($V=1/\rho$). Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = T \frac{dS}{dt} - p \frac{dV}{dt} = T \frac{dS}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (1.18)$$

С другой стороны,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.19)$$

так что

$$p \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\rho} = -\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (1.20)$$

Следовательно, для адиабатических процессов имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (1.21)$$

откуда

$$E = \int \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho}. \quad (1.22)$$

Величину

$$w = E + \frac{p}{\rho} = \int \frac{dp}{\rho} \quad (1.23)$$

называют тепловой функцией. Если процесс неадиабатический, то имеет место равенство (1.18). Причем из (1.15) и (1.18) получаем

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{\lambda}{\rho} \Delta T + \frac{Q}{\rho}. \quad (1.24)$$

Величина $T \frac{dS}{dt}$ и есть прирост тепла единицы массы газа. Как видим, он обусловлен исключительно теплопроводностью и работой сил трения. Если пренебречь λ и μ , а эффекты, вызываемые ими в общем балансе энергии, являются обычно малыми поправками, то мы получаем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla S) = 0, \quad (1.25)$$

т. е. адиабатическое движение жидкости. Для этого движения, если оно к тому же безвихревое ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$), имеет место теорема Бернулли.

Полагая в этом случае

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi, \quad (1.26)$$

где Φ — потенциал скоростей, получим из (1.13) и (1.14)

$$\nabla \left[-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \right] = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (1.27)$$

и так как на основании (1.23) $(\nabla p/\rho) = \nabla w$, то интегрирование (1.27) дает

$$w = \int^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2. \quad (1.27')$$

Если пренебречь еще сжимаемостью жидкости, то

$$w = \frac{p}{\rho_0} + \text{const}, \quad (1.28)$$

так что

$$p = \rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2}(\nabla\Phi)^2 + \text{const}, \quad (1.29)$$

и в случае стационарных потоков ($\partial\Phi/\partial t = 0$)

$$p = \text{const} - \frac{\rho_0}{2}(\nabla\Phi)^2 = \text{const} - \frac{\rho_0 v^2}{2}. \quad (1.30)$$

То обстоятельство, что для идеальной жидкости ($\lambda = \mu = 0$) энтропия при движении остается постоянной, делает очень целесообразным введение в уравнение состояния (1.8) вместо переменных (ρ, T) переменных (ρ, S) , так как при таком выборе переменных одна из переменных (S) остается постоянной, в то время как температура T меняется и при движении идеальной жидкости (при адиабатических сжатиях и расширениях жидкости). Поэтому вместо (1.8) целесообразно писать:

$$p = Z'(\rho, S). \quad (1.8')$$

§ 2. Уравнения акустики в отсутствие ветра

Рассмотрим теперь уравнения, управляющие распространением звука в неподвижной среде. Мы будем называть колебания среды звуковыми или просто звуком, если амплитуда колебаний настолько мала, что можно пренебречь всеми изменениями состояния газа в любом малом объеме, вызванными в нем переносом (конвекцией) массы, импульса и энергии. Это есть условие *линейности* колебаний. Далее мы будем считать, что эти колебания происходят с частотами, лежащими в интервале слышимости (область классической акустики) или около него (инфра- и ультразвуки). Математически указанное пренебрежение сводится к пренебрежению в уравнениях аэродинамики сжимаемого газа членами, содержащими вторые степени или произведения малых величин, определяющих отклонения состояния газа от равновесного. Положим $p = p_0 + \pi$, где π есть отклонение давления от равновесного значения p_0 , $\rho = \rho_0 + \delta$, где ρ_0 — значение плотности при $p = p_0$ и $T = T_0$, наконец, $\mathbf{v} = \xi$ (ξ — малая скорость). Подобным же образом поступим для температуры, энтропии и энергии:

$$T = T_0 + \theta, \quad S = S_0 + \sigma, \quad E = E_0 + \epsilon.$$

Тогда вместо (1.12) и (1.13) получаем:

$$\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla \pi + \mu \Delta \xi + \frac{1}{3} \mu \nabla \operatorname{div} \xi, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \xi = 0. \quad (1.32)$$

К этим уравнениям следует еще присоединить уравнение состояния газа, которое для идеального газа в переменных ρ , T гласит:

$$p = r \rho T, \quad (1.33)$$

где r — газовая постоянная для единицы массы, а в переменных ρ , S

$$p = r^\gamma \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} e^{(S-S_0)/c_p}, \quad (1.34)$$

где c_p — теплоемкость при постоянном объеме ($c_p = \frac{r}{\gamma - 1}$), а $\gamma = c_p/c_v$ есть отношение теплоемкостей при постоянном

давлении и постоянном объеме. Для малых изменений состояния получаем из (1.34):

$$\pi = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \delta + \frac{p_0}{c_v} \sigma + \dots = c^2 \delta + h \sigma + \dots; \quad h = \frac{p_0}{c_v}.$$

При $\sigma=0$ остается лишь первый член, представляющий малые изменения давления при малом адиабатическом сжатии или расширении газа. Величина

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (1.35)$$

есть адиабатическая скорость звука. Второй член дает изменения давления, вызванные притоком или убылью тепла. Изменения энтропии σ подчиняются уравнению (1.24), которое в пренебрежении величинами второго порядка малости напишется в виде

$$T_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_0} \Delta \theta, \quad \lambda = \rho c_v \kappa. \quad (1.36)$$

Изменения температуры θ могут быть выражены через изменения плотности и энтропии. Именно, из (1.17) имеем:

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_\rho. \quad (1.37)$$

Энергия идеального газа равна

$$E = c_v T = \frac{p}{(\gamma - 1) \rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} e^{\sigma/c_v}, \quad (1.38)$$

откуда $\frac{\partial E}{\partial S} = \frac{\partial E}{\partial \sigma}$ получается в виде

$$T = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^{\gamma-1}}{(\gamma - 1) c_v} e^{\sigma/c_v} = \frac{p}{(\gamma - 1) \rho c_v}, \quad (1.37')$$

т. е. для малых изменений ρ и S

$$\theta = \frac{p_0}{\rho_0^2 c_v} \delta + \frac{p_0}{\rho_0 (\gamma - 1) c_v^2} \sigma + \dots \quad (1.39)$$

Здесь первый член представляет собой изменение температуры, происходящее при адиабатическом сжатии или расширении газа, а второй — изменение температуры из-за изменения энтропии газа.

Подставляя в (1.36), находим:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \kappa \Delta \sigma + \kappa_1 \Delta \delta, \quad \kappa_1 = \kappa \frac{(\gamma - 1) c_0}{\rho_0}. \quad (1.40)$$

Уравнения (1.31), (1.32), (1.40) вместе с уравнением состояния (1.34) управляют распространением звука в неподвижной среде с учетом вязкости и теплопроводности этой среды.

Эффекты, вызванные наличием вязкости и теплопроводности, сводятся, в первом приближении, к поглощению звука средой. Это поглощение обычно невелико. Мы можем без труда определить его величину для плоской волны. Пусть ее направление распространения совпадает с осью Ox . Пусть частота звука равна ω , а волновое число равно k . Тогда мы можем положить:

$$\xi = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \delta = \delta_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.41)$$

где ξ_0 , δ_0 , σ_0 суть амплитуды колебаний соответствующих величин. Подставляя (1.41) в (1.31), (1.32), (1.40), находим

$$i\omega\rho_0\xi_0 = ik(c^2\delta_0 + h\sigma_0) - \frac{4}{3}\mu k^2\xi_0, \quad (1.31')$$

$$i\omega\delta_0 - ik\rho_0\xi_0 = 0, \quad (1.32')$$

$$i\omega\sigma_0 = -\kappa k^2\sigma_0 - \kappa_1 k^2\delta_0. \quad (1.40')$$

Исключая отсюда амплитуды, найдем соотношение между k и ω :

$$\omega\rho_0 = k\left(c^2\frac{k\rho_0}{\omega} - \frac{h\kappa_1 k^2}{i\omega + \kappa k^2}\frac{k\rho_0}{\omega}\right) + \frac{4}{3}i\mu k^2. \quad (1.42)$$

Полагая $k = \frac{\omega}{c} - i\alpha$, где α — коэффициент затухания волны, мы получаем, что скорость распространения c' в первом приближении равна c , а коэффициент затухания α равен

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{\mu\omega^2}{\rho c^3} + \frac{\kappa}{2}\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)\frac{\omega^2}{c^3}, \quad (1.43)$$

где $a^2 = p_0/\rho_0$ есть квадрат изотермической скорости звука. Для воздуха $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-13} f^2 \text{ см}^{-1}$, причем

$f = \omega/2\pi$ — частота звука в герцах,

и, следовательно, во многих случаях действием вязкости и теплопроводности можно будет пренебрегать или учитывать их влияние, вводя в окончательные результаты коэффициент поглощения звука. Малость влияния вязкости и теплопроводности воздуха на распространение звука определяется не только малостью коэффициентов μ и κ , но и малостью градиентов всех величин, изменяющихся при распространении звука. Из уравнений (1.31) и (1.40) следует, что эти градиенты входят в уравнение в виде вторых производных от ξ , σ и т. д. (например, $\mu \Delta \xi$ и $\kappa \Delta \sigma$). При распространении волны в свободном пространстве эти производные по порядку величины равны ξ/λ^2 , σ/λ^2 и т. д. и становятся значительными лишь для очень коротких длин волн (что видно из окончательной формулы для коэффициента поглощения α , согласно которой α растет пропорционально квадрату частоты).

Вблизи границ твердых или жидких тел, которые можно считать неподвижными, потери на вязкость и теплопроводность возрастают. В этих случаях имеют место более резкие изменения состояния газа в пространстве и вторые производные от ξ , σ , δ определяются уже не длиной волны, а либо размерами тела l , так что $\Delta \xi \sim \xi/l^2$, $\Delta \sigma \sim \sigma/l^2$, либо «естественной» длиной $d' = \sqrt{\nu/\omega}$ (эта длина — еще одна длина помимо λ и l , определяемая из соображений размерности), где ν есть кинематическая вязкость ($\nu = \mu/\rho$), или длиной $d'' = \sqrt{\kappa/\omega}$. В этих случаях порядок величин $\Delta \xi \sim \xi/d^2$, $\Delta \sigma \sim \sigma/d^2$.

Вообще, если речь идет о потерях на вязкость и теплопроводность вблизи границы твердого или жидкого тела, то они определяются наименьшей из трех длин λ , l , d (d' , d'').

Несмотря на возрастание потерь вблизи стенок и неподвижных границ, они все же остаются незначительными и могут рассматриваться как поправка к движению, происходящему без потерь (кроме случая распространения звука в очень узких каналах). Пример приближенного расчета эффектов вязкости и теплопроводности можно найти в работе автора [4].

Помимо поглощения звука, связанного с теплопроводностью и вязкостью среды, существует еще молекулярное поглощение звука, обнаруженное В. Кнудсеном [5]

и истолкованное Г. Кнезером [6]. Физическая сущность этого поглощения заключается в превращении энергии звуковых колебаний в энергию внутримолекулярных движений (энергия вращения молекул). Это поглощение также растет с частотой и имеет особое значение для ультразвуков.

Рассмотрение этих вопросов увело бы нас далеко в сторону от нашего предмета, поэтому мы ограничимся этим замечанием и указанными ссылками на литературу.

Во всех тех случаях, когда нас не интересуют потери звуковой энергии, мы можем совсем игнорировать вязкость и теплопроводность воздуха. Полагая в (1.31) и (1.40) $\lambda=0$, $\mu=0$, мы получим $\sigma=0$, т. е. адиабатическое распространение звука, а уравнения, описывающие это распространение, получают вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla \pi, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \xi = 0, \quad (1.45)$$

$$\pi = c^2 \delta. \quad (1.46)$$

Эти уравнения могут быть разрешены с помощью одной функции φ , которую называют потенциалом скоростей (или просто потенциалом). В самом деле, положив

$$\pi = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \xi = -\nabla \varphi, \quad (1.47)$$

мы удовлетворим уравнению (1.44). Тогда из (1.46) и (1.45) получаем волновое уравнение для потенциала:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.48)$$

которое, при наличии тел, должно решаться с граничным условием

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = \xi_{0n} \text{ (на поверхности тела),} \quad (1.49)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ есть производная по нормали к поверхности тела, а ξ_{0n} есть нормальная скорость поверхности тела, пред-

полагаемая, конечно, малой. Для неподвижных тел вместо (1.49) имеем просто

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на поверхности тела}). \quad (1.49')$$

Естественно, что для однозначного решения задачи о звуковом поле, описываемом уравнением (1.48), помимо граничных условий (1.49) или (1.49') должны быть сформулированы еще и начальные условия для φ и $\partial \varphi / \partial t$.

§ 3. Энергия и поток энергии в акустике

Оперируя в области линейной акустики, мы вычисляем все величины, относящиеся к звуку, с точностью до первой степени амплитуды A , которая может быть, например, амплитудой поршня, возбуждающего звуковые колебания. Уточняя решения уравнений гидродинамики, мы можем перейти к следующему приближению, содержащему члены, пропорциональные A^2 , и т. д. (учет нелинейных явлений). Таким образом, для давления p , плотности ρ и скорости движения v мы можем написать ряды

$$p = p_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots, \\ v = v_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots \quad (1.50)$$

Величины p_0 , ρ_0 , v_0 относятся к невозмущенному звуком движению, величины π_1 , δ_1 , ξ_1 пропорциональны A , величины π_2 , δ_2 , ξ_2 пропорциональны A^2 и т. д. Энергия и поток энергии содержат квадраты величин δ_1 , ξ_1 , π_1 . Поэтому при вычислении энергии и потока энергии в линейной акустике следует соблюдать, как это было указано И. Бронштейном и Б. Константиновым [7], а также Н. Н. Андреевым [8], некоторую осмотрительность, так как эти величины, будучи величинами порядка A^2 , могут также содержать первые степени следующего приближения (π_2 , δ_2 , ξ_2), причем даваемый ими внос будет того же порядка, что и внос от квадратов π_1 , δ_1 , ξ_1 .

Общее выражение для плотности энергии сжимаемой среды есть

$$U = \frac{\rho v^2}{2} + \rho E, \quad (1.51)$$

где E — внутренняя энергия единицы массы среды. Что же касается потока энергии N , то на основании (1.11), при пренебрежении вязкостью и теплопроводностью, он равен

$$N = Uv + pv. \quad (1.52)$$

На основании закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} N = 0. \quad (1.53)$$

Это уравнение есть не что иное, как одно из основных уравнений гидродинамики, именно уравнение (1.4) для случая идеальной жидкости ($\mu = \lambda = \gamma = 0$).

Для идеального газа $\rho E = p/(\gamma - 1)$ (ср. уравнение (1.38)), поэтому

$$N = \frac{\rho v^2}{2} v + \frac{\gamma p v}{\gamma - 1}. \quad (1.52')$$

Обратимся теперь к акустике и будем считать исходную среду неподвижной ($v_0 = 0$). Найдем с точностью до величин порядка A^2 энергию звука $\varepsilon_2 = U_2 - \rho_0 E_0$ и поток звуковой энергии N_2 .

Отбрасывая члены порядка A^3 , получим:

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \operatorname{div} N_2 = 0, \quad (1.53')$$

где

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho_0 \xi_1^2}{2} + \frac{\pi_1 + \pi_2}{\gamma - 1}; \quad N_2 = \frac{\gamma p_0}{\gamma - 1} (\xi_1 + \xi_2) + \frac{\gamma \pi_1 \xi_1}{\gamma - 1}. \quad (1.54)$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 (\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_0 \delta_1^2 + \dots = \\ &= p_0 + c_0^2 (\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \frac{c_0^2 \delta_1^2}{\rho_0} = \\ &= p_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.55)$$

$\left[c_0^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right]$ есть квадрат адиабатической скорости], и тем, что $\pi_1 = c_0^2 \delta_1$, мы можем переписать (1.54) в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \frac{\rho_0 \xi_1^2}{2} + \frac{\pi_1^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} (\delta_1 + \delta_2), \\ N_2 &= \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma - 1} (\xi_1 + \xi_2) + \frac{\gamma \pi_1 \xi_1}{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (1.54')$$

Мы теперь покажем, что в случае однородной покоящейся среды ($v_0 = 0$, $c_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$) из (1.53) следует новая форма закона сохранения, в которой энергия звука и ее поток выражаются только через величины, характерные для линейной акустики (π_1 , δ_1 , ξ_1), не содержащие второго приближения (π_2 , δ_2 и ξ_2). Уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения вещества (1.12), будучи написано с точностью до членов порядка A^2 , гласит:

$$\frac{\partial (\delta_1 + \delta_2)}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} (\xi_1 + \xi_2) + \operatorname{div} (\delta_1 \xi_1) = 0. \quad (1.56)$$

Умножив это уравнение на $c_0^2/(\gamma - 1)$, вычтем результат из (1.53). Тогда, имея в виду, что $\delta_1 = \pi_1/c_0^2$, и пользуясь (1.54), найдем:

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + \operatorname{div} N_1 = 0, \quad (1.57)$$

где

$$\epsilon_1 = \frac{\rho_0 \xi_1^2}{2} + \frac{\pi_1^2}{2\rho_0 c_0^2}, \quad N_1 = \pi_1 \xi_1. \quad (1.58)$$

Полученные новые выражения для энергии звука и потока звуковой энергии ϵ_1 — как раз те, которые обычно и принимаются в акустике. В частности, если ввести потенциал звуковой волны φ [$\xi_1 = -\nabla \varphi$, $\pi_1 = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, ср. (1.47)], то

$$\epsilon_1 = \frac{\rho_0}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2, \quad N_1 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi. \quad (1.59)$$

Если, как это часто бывает, потенциал φ гармонически зависит от времени и дается в комплексном виде (φ про-

порционально $e^{i\omega t}$), то средняя по времени энергия и средний по времени поток равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_0}{4} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi^* + \frac{\omega^2 \rho_0}{4c_0^2} \varphi \varphi^*, \quad N_1 = \frac{i\omega \rho_0}{4} \{ \varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^* \}, \quad (1.60)$$

где знак * означает, что следует взять комплексно сопряженную величину.

Выражения для энергии и потока энергии (1.54) и (1.58) физически равноправны, поскольку среда пред-

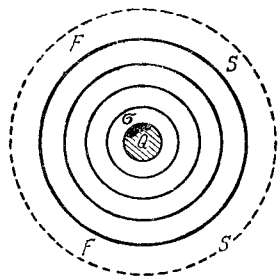


Рис. 1.

полагается однородной (в неоднородной среде формулы (1.58) не имеют силы). Чтобы показать эквивалентность обеих форм законов сохранения, из которых одна является следствием другой (при указанных условиях), обратимся к излучению звука. На рис. 1 изображен источник звука Q (твердое тело), некоторая часть поверхности которого σ совершает колебания, которые и возбуждают звуковые волны.

Если колебание началось в момент времени $t=0$, то к моменту t поверхность фронта волны будет, скажем, поверхностью F (см. рис. 1). Все пространство между этой поверхностью и источником Q будет заполнено излученной звуковой энергией. Проведем произвольную контрольную поверхность S , охватывающую источник звука, и применим теорему сохранения (1.53) в интегральном виде к объему V , заключенному между S и Q . Для этого следует проинтегрировать (1.53) по объему и затем, пользуясь теоремой Гаусса, преобразовать интеграл от $\text{div } N_2$ к поверхностному. Этот интеграл будет состоять из интеграла по поверхности S и по поверхности источника Q . Ввиду того, что часть его поверхности является подвижной (σ), то возникает некоторое неудобство, которое, однако, легко может быть обойдено из того соображения, что поток энергии через поверхность источника должен попросту равняться мощности источника W_2 .

Таким образом из уравнения (1.53), учитывая все сказанное, находим:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + \int_S \left[\frac{p_0 \gamma}{\gamma - 1} (\xi_1 + \xi_2)_n + \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\pi_1 \xi_1)_n \right] d\sigma = W_2, \quad (1.61)$$

где n — значок проекции ξ на нормаль к поверхности S ;

$$E_2 = \int_V \varepsilon_2 dV$$

есть полная энергия звукового поля, заключенного внутри S . Мощность источника Q , очевидно, равна

$$W_2 = \int_{\sigma} [p_0 (\xi_1 + \xi_2)_\nu + (\pi_1 \xi_1)_\nu] \frac{\gamma}{\gamma - 1} d\sigma, \quad (1.62)$$

где ν — значок проекции на нормаль к поверхности σ . Если мы проведем контрольную поверхность вне звукового поля (например, вне фронта волны F , но бесконечно близко к нему), то из (1.61) найдем

$$\frac{dE_2}{dt} = W_2, \quad E_2 = \int_0^t W_2 dt, \quad (1.63)$$

т. е. полная излученная энергия E_2 равна работе источника Q . С другой стороны, мы можем взять вторую форму закона сохранения (1.57) и тем же путем придем к равенству

$$\frac{dE_1}{dt} = W_2, \quad E_1 = \int_0^t W_2 dt. \quad (1.63')$$

Отсюда следует, что E_1 должно быть равно E_2 .

Из (1.54') и (1.58) следует, что

$$E_2 - E_1 = \frac{c^2}{\gamma - 1} \int_V (\delta_1 + \delta_2) dV, \quad (1.64)$$

где интегрируется по объему V . Интеграл

$$\int_V (\delta_1 + \delta_2) dV$$

есть полное изменение массы газа в объеме, занятом звуковым полем. Это изменение равно нулю, так как вещество не могло вытечь за пределы фронта волны. Таким образом,

действительно, $E_1 = E_2$. Заметим еще, что если интеграл по времени в (1.63) или (1.63') взять за полное число периодов колебаний источника и принять во внимание, что в этом случае

$$d\sigma \cdot p_0 \int_0^t (\xi_1 + \xi_2) dt = 0$$

(так как этот интеграл равен алгебраически взятому пути элемента поверхности $d\sigma$ источника Q в направлении по нормали к σ за полное число периодов), то при пренебрежении энергией, полученной за часть периода, имеем:

$$E_2 = E_1 = \int_0^t dt \int_{\sigma} d\sigma (\pi_1 \xi_1) = \overline{(\pi_1 \xi_1)} \sigma t, \quad (1.65)$$

где $\overline{(\pi_1 \xi_1)}$ — среднее значение вектора потока энергии.

Из изложенного следует, что в интегральном виде обе формы закона сохранения совершенно тождественны. В силу этого, несмотря на полную закономерность и общность выражений E_2 , N_2 , содержащих элементы нелинейной акустики, в линейной акустике, в условиях однородной и неподвижной среды, вполне возможно и рациональнее употреблять для энергии и ее потока формулы (1.58), как это обычно и делают.

Рассмотренная эквивалентность (1.54) и (1.58) нарушается, если среда неоднородна и находится в движении. Формулы для E_2 и N_2 легко обобщить и на случай движущейся среды. Однако получаются довольно громоздкие выражения, которые мы не будем здесь приводить.

Существенно, что в приближении геометрической акустики, как будет показано в § 7, в неоднородной и движущейся среде получаются сравнительно простые выражения для плотности энергии звука E и потока энергии N , родственные выражениям (1.58) и содержащие величины только линейной акустики.

§ 4. Распространение звука в движущейся и неоднородной среде

При наличии движения воздуха акустические явления усложняются. В общем случае невозможно отделить акустические явления, в узком смысле слова, от сугубо

нелинейных процессов, имеющих место в движущейся среде. Так, например, пульсирующий по скорости поток, будь частота этих пульсаций достаточно велика, действует на помещенный в него микрофон или ухо (отвлекаясь от явлений, связанных с вихреобразованием на самом корпусе микрофона; см. § 28) как звук соответствующей частоты, хотя скорость распространения этих пульсаций не имеет ничего общего со скоростью звука.

Связь между давлением этих пульсаций и их скоростью нелинейна и также фундаментально отличается от связи между давлением в звуковой волне и скоростью звуковых колебаний. Наконец, переменный нестационарный поток может сам явиться источником звука. Подобные явления мы рассмотрим позднее, а в этом разделе сосредоточим внимание исключительно на проблеме распространения звука. Чтобы можно было отделить распространяющийся в среде звук от акустических явлений, возникающих в самой среде только в силу ее движения, мы будем считать это движение «беззвучным», т. е. будем предполагать, что движения в потоке достаточно медленны, так что

$$\tau \gg 1/f, \quad (1.66)$$

где τ — время, в течение которого происходят заметные изменения в состоянии потока (например, период пульсаций скорости потока), а f — частота распространяющегося через среду звука. Это условие требует дополнительных пояснений. Дело в том, что оно зависит от выбора системы координат, к которым мы относим движение потока.

Действительно, общее поступательное движение среды не имеет значения, так как оно попросту приводит к переносу звуковой волны. Потому достаточно, чтобы условие (1.66) соблюдалось в какой-нибудь одной из равномерно движущихся систем координат.

Если, например, мы имеем дело с потоком, в котором распределение скоростей стационарно, не зависит от времени, но скорость потока примерно периодически меняется в пространстве с периодом l , то для этого потока $\tau = \infty$. Если этот же поток рассматривать с точки зрения наблюдателя, движущегося со скоростью u , то для него поток будет выглядеть нестационарным, причем период пульсаций скорости будет равен $\tau' = l/u$.

Между тем, явление распространения звука в обеих системах координат будет отличаться только переносом звуковой волны как целого со скоростью u . Поскольку сейчас нас интересует только распространение звука, постольку это легко учитываемое различие не представляется существенным.

Однако следует иметь в виду, что коль скоро мы расширили бы постановку вопроса и, например, обратились бы к рассмотрению приема звука, то мы пришли бы к совершенно различным результатам в этих двух системах отсчета. В первой системе отсчета, в которой поток стационарен, приемник звука принимал бы лишь одну частоту f — частоту распространяющегося звука. Во второй системе отсчета помимо этой частоты f ¹⁾ приемник принимал бы также частоту пульсаций в потоке, т. е. $f' = 1/\tau' = u/l$ и комбинационные частоты $f_n = f \pm nf'$, $n = 1, 2, 3, \dots$

В дальнейшем мы будем считать, что условие (1.66) выполнено в какой-либо из возможных систем отсчета. Тогда влияние потока на распространение звука будет выражаться в том, что, во-первых, звук будет «сноситься» потоком и, во-вторых, рассеиваться на неоднородностях этого потока.

Обращаясь теперь к выводу основных уравнений акустики движущейся среды, мы будем игнорировать влияние вязкости и теплопроводности среды на распространение звука. Это влияние удобнее может быть учтено особо, как поправка, и ведет к уже рассмотренному выше поглощению звука. Однако роль этих факторов, определяющих необратимые процессы в гидродинамике, может быть весьма существенна в образовании исходного состояния среды, в которой распространяется звук. Не менее существенно в этом же отношении действие силы тяжести. Поэтому в основу теории распространения звука в неоднородной и движущейся среде следует положить общие уравнения движения сжимаемой жидкости.

Согласно (1.12), (1.13) и (1.24) эти уравнения гласят:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.67)$$

¹⁾ На самом деле она несколько изменится из-за эффекта Доплера; см. § 5.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{v}] + \nabla \frac{v^2}{2} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\nu}{3} \nabla \text{div } \mathbf{v}, \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla S) = \frac{\lambda}{\rho} \frac{\Delta T}{T} + \frac{Q}{\rho T}. \quad (1.69)$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$ есть кинематическая вязкость среды. Далее, уравнение (1.13) мы дополнили членом $+\mathbf{g}$, представляющим действие силы тяжести. Вектор \mathbf{g} есть вектор ускорения силы тяжести, направленный всегда к центру Земли. Таким образом, $\rho \mathbf{g}$ есть сила тяжести, действующая на единицу объема жидкости.

Пусть теперь в среде, состояние которой описывается величинами \mathbf{v} , p , ρ , S , распространяется звук. Исходное состояние среды (\mathbf{v}, p, ρ, S) будем считать устойчивым, а звук будем рассматривать как малое колебание. Тогда все указанные величины получают малые приращения: ξ , π , δ , σ соответственно; ξ будет скоростью звуковых колебаний, π — давлением звука, δ есть изменение плотности среды, а σ — изменение ее энтропии, происходящее при прохождении звуковой волны.

Чтобы получить уравнения для элементов звуковой волны, заменим в (1.67), (1.68) и (1.69) \mathbf{v} на $\mathbf{v} + \xi$, p на $p + \pi$, ρ на $\rho + \delta$ и S на $S + \sigma$; ограничиваясь линейным приближением, отбросим члены высших порядков относительно малых величин ξ , π , δ , σ . К тому же, как было только что отмечено, мы намерены игнорировать необратимые процессы, имеющие место при распространении звука. Это значит, что в линейных уравнениях для ξ , π , δ , σ мы отбрасываем члены, пропорциональные вязкости (μ или ν) и теплопроводности λ . Напомним, что на основании (1.16) и (1.5) диссипируемое в жидкости тепло Q также принадлежит к числу величин, пропорциональных μ .

Указанным путем без труда получаем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + [\text{rot } \mathbf{v}, \xi] + [\text{rot } \xi, \mathbf{v}] + \nabla (\mathbf{v}, \xi) = -\frac{\nabla \pi}{\rho} + \frac{\nabla p \cdot \delta}{\rho^2}; \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \delta) + (\xi, \nabla \rho) + \rho \text{div } \xi + \delta \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \sigma) + (\xi, \nabla S) = 0. \quad (1.72)$$

К этим уравнениям следует еще присоединить уравнение состояния, которое мы возьмем в переменных ρ , S . Для малых изменений давления (π) совершенно так же, как это было сделано в предыдущем параграфе, получаем:

$$\pi = c^2 \delta + h\sigma; \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S, \quad h = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho. \quad (1.73)$$

Уравнения (1.70)—(1.73) и являются основными уравнениями акустики для неоднородной и движущейся среды. Их отличие от известных в литературе заключается в том, что они справедливы и в такой среде, энтропия которой меняется от точки к точке ($\nabla S \neq 0$) и потоки в которой могут быть завихренными ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$).

Приближения, сделанные в этих уравнениях, помимо линейности, заключаются лишь в том, что в них не учтены необратимые процессы в звуковой волне, так что звуковая волна рассматривается как процесс адиабатический. Уравнение (1.72) и выражает этот факт. В самом деле, из него следует, что

$$\frac{d(S + \sigma)}{dt} = 0,$$

т. е. энтропия определенного количества вещества остается неизменной при прохождении звуковой волны. Энтропия же вещества в данном месте пространства может, конечно, меняться:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq 0.$$

В этом смысле мы будем говорить, что звуковая волна *не изоэнтропична*. Линейный характер наших уравнений требует, чтобы малое возмущение оставалось малым с течением времени (устойчивость исходного состояния). Поэтому с помощью этих уравнений нельзя описать, например, такого любопытного явления, как «чувствительное пламя» газовой горелки, высота которого резко меняется под действием звуковой волны.

В остальном наши уравнения совершенно общи, и нам совершенно безразлично, каким путем образовалось исходное состояние среды. В возникновении этого состояния могли иметь существенное значение и сила тяжести, и теплопроводность, и приток энергии извне (например,

солнечное тепло). Влияние всех этих факторов на распространение звука учтено в уравнениях (1.70), (1.71), (1.72), (1.73) через величины v , p , ρ , S , характеризующие исходную среду.

Следует еще отметить, что уравнение $p = Z(\rho, S)$, а вместе с тем уравнение (1.73) имеют силу лишь для однокомпонентной среды. Вообще давление может зависеть не только от ρ и S , но и от концентрации различных компонент. В сложной среде нужно к тому же учесть еще диффузию различных компонент. Соответствующее несложное обобщение уравнений (1.70)—(1.73) будет нами сделано в § 13, где рассмотрен случай морской соленой воды.

Примененный нами выбор термодинамических переменных (ρ, S) весьма удобен для общих теоретических рассмотрений. Для окончательных числовых расчетов, однако, более удобны переменные (p, T) . Поэтому мы приведем сейчас формулы, выражающие величины $(\partial p / \partial S)_\rho$ и ∇S , входящие в наши уравнения, через переменные (p, T) .

Имеем:

$$\nabla S = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \nabla T + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \nabla p.$$

На основании известных термодинамических соотношений

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \frac{\beta_p}{\rho};$$

c_p — теплоемкость при постоянном давлении, β_p — коэффициент объемного расширения,

$$\beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Стало быть,

$$\nabla S = \frac{c_p}{T} \nabla T - \frac{\beta_p}{\rho} \nabla p. \quad (1.74)$$

Далее:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\rho \beta_p, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = a^2 = \frac{c_v}{c_p} c^2,$$

где c^2 — квадрат адиабатической скорости звука. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = \frac{\rho c^2}{c_p} \beta_p T. \quad (1.75)$$

На основании (1.74) и (1.75), зная среду (c^2 , c_p , β_p) и ее состояние (p , T как функции координат), легко найти ∇S и $(\partial p / \partial S)_\rho$.

Система основных уравнений (1.70) — (1.73), даже если исключить с помощью (1.73) одну переменную (например, δ), все же содержит пять неизвестных и потому весьма сложна. Тем не менее, если мы хотим получить полную волновую картину распространения звука, то нельзя избежать этих уравнений. Основное осложнение заключается в том, что коль скоро давление в среде является функцией двух переменных (ρ и T или, как мы предпочитаем, ρ и S), то даже в покоящейся среде, где не только отсутствуют вихри потока, но и вообще нет никакого потока, все же правая часть уравнения (1.70) не будет градиентом какой-либо функции, а в силу этого звук будет завихренным ($\text{rot } \xi \neq 0$). Значительные упрощения получаются в том случае, когда изменения p , ρ , S малы на протяжении длины звуковой волны. Этот случай геометрической акустики будет рассмотрен нами подробнее в следующей главе.

А сейчас мы рассмотрим некоторые специальные случаи нашей общей системы, не сводящиеся к приближениям геометрической акустики.

Важнейший специальный случай будет, когда исходный поток не завихрен ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) и энтропия среды постоянна ($\nabla S = 0$).

При этих условиях давление в среде есть функция лишь плотности среды, так что $\nabla p = c^2 \nabla \rho$. Из (1.72) следует, что при $\nabla S = 0$ $\sigma = 0$, так что звук будет распространяться изоэнтропически. Тогда

$$\pi = c^2 \delta.$$

Если теперь ввести потенциал звукового давления

$$\Pi = \pi/\rho, \quad (1.76)$$

то правая часть (1.70) будет равна $-\nabla\Pi$. В силу этого можно ввести еще потенциал скорости звуковых колебаний φ :

$$\xi = -\nabla\varphi. \quad (1.77)$$

Звук будет в этом случае незавихренным. Из (1.70) тогда находим:

$$\frac{\pi}{\rho} = \Pi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla\varphi) = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.78)$$

Подставляя теперь в (1.71) вместо δ величину Π , для чего следует заметить, что

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{c^2}{\rho} \cdot \frac{\partial\delta}{\partial t}, \quad \nabla\Pi = \delta \nabla \frac{c^2}{\rho} + \frac{c^2}{\rho} \nabla\delta,$$

мы получим уравнение для φ :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = c^2 \Delta\varphi + (\nabla\Pi_0, \nabla\varphi) + \frac{d\varphi}{dt} (\mathbf{v}, \nabla \ln c^2), \quad (1.79)$$

где Π_0 есть потенциал давления (тепловая функция) исходного потока:

$$\Pi_0 = \int \frac{dp}{\rho}. \quad (1.80)$$

Уравнение (1.79) было выведено Н. Н. Андреевым и И. Г. Русаковым [10], однако без последнего члена, который у них ошибочно отсутствует. Это уравнение исчерпывающим образом описывает распространение звука в среде, в которой энтропия постоянна.

А. М. Обухов [11] указал уравнение, которое позволяет приближенно учесть наличие завихренности потока и тем не менее обойтись с одной функцией — «квазипотенциалом» ψ . Этот квазипотенциал вводится формулой

$$\xi = -\nabla\psi + \int^t [\text{rot } \mathbf{v}, \nabla\psi] dt. \quad (1.81)$$

Квазипотенциал может быть введен лишь при достаточной малости завихренности исходного потока, а именно мы должны считать, что

$$\Omega = |\operatorname{rot} \mathbf{v}| \ll \omega, \quad (1.82)$$

где ω — циклическая частота звука.

Кроме того, мы предположим, что $v/c \ll 1$, так что исходный поток можно считать несжимаемым ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$). Наконец, давление среды считается функцией лишь плотности среды. Так как $\partial p / \partial \rho$ рассматривается у А. М. Обухова как адиабатическая скорость звука, то это означает неявное предположение, что энтропия среды постоянна. В связи с этим возникает вопрос о том, насколько вообще совместимы предположения наличия завихренности ($\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$) и постоянства энтропии ($\nabla S = 0$). Не исключено, однако, что влияние вихрей на распределение звука эффективнее, чем влияние градиента энтропии. Считая соблюденными указанные предположения, мы подставим ξ из (1.81) в (1.70), и так как $\nabla S = 0$, то правая часть (1.70) опять будет равна $-\nabla \Pi$. После простых сокращений мы получим прежнее уравнение:

$$\Pi = \frac{\pi}{\rho} = \frac{d\psi}{dt}. \quad (1.83)$$

Однако в этом случае оно верно лишь приближенно, с точностью до $\frac{\Omega^2}{\omega^2}$, $\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{v}{c}$.

Выражая δ в (1.71) через Π и ψ , мы получим уравнение А. М. Обухова:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} = c^2 \Delta\psi + (\nabla \Pi_0, \nabla\psi) + \frac{d\psi}{dt} (\mathbf{v}, \nabla \ln c^2) + \\ + c^2 \int^t (\nabla\psi, \Delta\mathbf{v}) dt - \left(\nabla \Pi_0, \int^t [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \nabla\psi] dt \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Это уравнение верно с точностью до $\frac{\Omega}{\omega}$, $\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{v}{k\Omega}$ ($k = \omega/c$).

Величина $\Delta\mathbf{v} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Заметим, что в этом уравнении члены порядка v^2/c^2 не могут приниматься во внимание, так как в сделанных приближениях использовано то, что $v/c \ll 1$ ¹⁾.

¹⁾ Результат А. М. Обухова, вероятно, более строго и последовательно мог бы быть получен как второе приближение геометрической акустики (ср. § 7),

§ 5. Уравнение для распространения звука в постоянном потоке

Во многих случаях скорость потока \mathbf{v} может быть целесообразно разложена на среднюю скорость \mathbf{V} и на флуктуацию скорости \mathbf{u} .

Влияние этих двух компонент скорости на распространение звука весьма различно. Средняя скорость потока обуславливает «снос» звуковой волны, а вторая, переменная часть скорости потока ведет к рассеянию звуковых волн. Позднее мы подробнее рассмотрим это явление. А сейчас сосредоточим свое внимание на влиянии средней скорости потока и рассмотрим уравнения для распространения звука, совершенно игнорируя переменную часть скорости потока \mathbf{u} . Получаемое при этих условиях решение представляет интерес не только как первый шаг к приближенному решению полной задачи с учетом флуктуаций скорости, но и имеет значение само по себе, в частности для теории движущегося источника звука.

Чтобы получить уравнение для распространения звука в однородной поступательно движущейся среде, достаточно положить в уравнении (1.79)

$$\nabla \Pi_0 = 0, \quad \nabla \ln c^2 = 0.$$

Раскрывая там полную производную по времени,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \right) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla\varphi) \right),$$

мы получим:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2 \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2}, \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) - \frac{(\mathbf{V}, \nabla)(\mathbf{V}, \nabla\varphi)}{c^2} = 0. \quad (1.85)$$

Направляя ось Ox по направлению средней скорости и обозначая через $\beta = V/c$, найдем:

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{c} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial x} = 0. \quad (1.85')$$

Если перейти к системе координат ξ, η, ζ , движущейся вместе с ветром,

$$\xi = x - Vt, \quad \eta = y, \quad \zeta = z,$$

то уравнение (1.85') переходит в обычное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.86)$$

что, разумеется, и следовало ожидать, так как в этой системе координат среда покоится. Найдем теперь некоторые важные решения уравнения (1.85').

Обратимся сперва к плоской звуковой волне. Пусть в системе координат (ξ, η, ζ) , покоящейся относительно воздуха (стало быть, для наблюдателя, движущегося вместе с ветром), эта волна имеет потенциал

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, t) = A \exp \left[i \omega \left(t - \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta}{c} \right) \right];$$

$$|\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2| = 1. \quad (1.87)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направляющие косинусы нормали к поверхности волны, ω — частота колебаний, c — скорость звука. Выражение (1.87) есть решение уравнения (1.86). Согласно упомянутому выше преобразованию, мы тотчас получим решение уравнения (1.85'), если заменим в (1.87) ξ на $x - Vt$, η на y и ζ на z :

$$\varphi(x, y, z, t) = A \exp \left\{ i \left[\omega' t - \frac{\omega}{c} (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) \right] \right\}, \quad (1.88)$$

причем

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{V}{c} \alpha_1 \right). \quad (1.89)$$

Таким образом, частота звука в неподвижной системе координат будет уже не ω , а ω' .

Это изменение частоты звука есть акустический эффект Доплера. Этот эффект имеет исключительно кинематическое происхождение: он зависит лишь от выбора системы координат. Как мы видим, все различие в распространении плоской волны в движущейся среде по сравнению со средой неподвижной сводится к этому кинематическому эффекту.

Позднее мы рассмотрим эффект Доплера более полно, учитывая не только движение наблюдателя звука, но также и движение самого источника звука, который сейчас не фигурирует явно в нашем расчете.

Второй важный вид решений уравнения (1.85) представляют звуковые волны, расходящиеся от некоторого малого точечного источника звука (или, напротив, сходящиеся к нему; в этом, последнем, случае мы имеем дело со «стоком» звука — понятие, конечно, весьма искусственное, но математически могущее быть полезным).

Математическое выражение для потенциала таких волн является обобщением потенциала сферических волн в случае покоящейся среды. Потенциал сферических волн в этом случае есть решение уравнения (1.86), имеющее вид

$$\chi_0 = \frac{F(t \pm r/c)}{r}, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad (1.90)$$

где F — произвольная функция. Решение со знаком минус представляет волны, расходящиеся от источника звука, помещенного в начало координат ($\xi = \eta = \zeta = 0$), а решение со знаком плюс представляет те же волны, но сходящиеся к «стоку» звука в начале координат. Если F есть гармоническая функция, то из (1.90) получим:

$$\chi_0 = \frac{\exp[i\omega(t \pm r/c)]}{r}, \quad (1.90')$$

т. е. сферическую гармоническую волну (с частотой ω). В движущейся среде, в которой распространение звука описывается уравнением (1.85'), вместо решений вида (1.90) будем иметь более общее выражение ¹⁾:

$$\chi = \frac{F(t + R/c)}{R^*}, \quad (1.91)$$

где

$$R = \frac{\beta x^* \pm R^*}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad R^* = \sqrt{x^{*2} + y^2 + z^2}, \quad x^* = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.92)$$

Подстановкой χ из (1.91) в (1.85) нетрудно убедиться, что (1.91) есть в самом деле решение (1.85), к тому же переходящее при $V=0$ ($\beta=0$) в решение вида (1.90).

Таким образом, решение (1.91) имеет для движущейся среды то же значение, что (1.90) для неподвижной: оно представляет волны, порождаемые точечным источником, или волны, сходящиеся к «стоку».

¹⁾ Происхождение этого решения более подробно освещено в § 15.

§ 6. Обобщенная теорема Кирхгофа

В теории распространения волн большое значение имеет теорема Кирхгофа, позволяющая выразить колебания в любой точке пространства через колебание на поверхностях, ограничивающих рассматриваемое пространство (включая и бесконечно удаленную поверхность). Мы выведем эту теорему для движущейся среды, исходя из уравнения (1.85') [12]. Это уравнение, если ввести сжатую в направлении движения (Ox) систему координат x^* , y , z ,

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y, \quad z = z, \quad (1.93)$$

примет вид

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^*} = 0, \quad (1.94)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Сингулярное решение χ (1.91) также удовлетворяет уравнению (1.94):

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x^*} = 0. \quad (1.95)$$

Решение χ содержит произвольную функцию F , которую мы, имея в виду дальнейшее использование решения для доказательства интересующей нас теоремы, специализируем, положив

$$\chi = \frac{\delta(t + R/c)}{R^*}, \quad R = \frac{\beta x^* + R^*}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.96)$$

где R^* есть расстояние $(\sqrt{x^{*2} + y^2 + z^2})$ от точки P с координатами x_P^* , y_P , z_P , в которой мы желаем определить потенциал φ , до произвольной точки пространства Q с координатами x_Q^* , y_Q , z_Q , так что

$$x^* = x_Q - x_P^*, \quad y = y_Q - y_P, \quad z = z_Q - z_P.$$

Функцию $\delta(\xi)$ определим так, что

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} f(0), & \text{если } b > 0, a < 0, \\ 0, & \text{если } b/a > 0. \end{cases} \quad (1.97)$$

Равенство (1.97) предполагается справедливым для любой функции $f(\xi)$, поэтому $\delta(\xi)$ всюду равно нулю, кроме точки $\xi = 0$, где $\delta(\xi) = \infty$. Следовательно, $\frac{\delta(t + R/c)}{R^*}$

представляет собой сходящийся сферический импульс (удар), сосредоточенный около $R = -ct$.

Рассмотрим теперь некоторую поверхность S , заключающую объем Ω в пространстве x^*, y, z (см. рис. 2, где поверхность S образована двумя поверхностями S_1 и S_2 , объем Ω заштрихован).

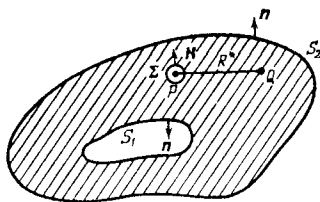


Рис. 2.

Умножая (1.95) на φ и (1.94) на χ , вычтем одно уравнение из другого и проинтегрируем результат по объему Ω и по времени от t_1 до t_2 . Таким образом, мы интегрируем по четырехмерному объему $\Omega(t_2 - t_1)$, тогда получится:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega (\varphi \Delta \chi - \chi \Delta \varphi) + \frac{1}{c^2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \left(\chi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) - \\ & - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \left(\varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x^*} - \chi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^*} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Применим теперь преобразование Грина:

$$\int_{\Omega} d\Omega (\varphi \Delta \chi - \chi \Delta \varphi) = \int_S dS \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right), \quad (1.99)$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по наружной нормали к поверхности S , заключающей объем Ω . В точке P преобразование (1.99) будет несостоятельно, так как в этой точке χ обращается в бесконечность. Поэтому мы окружим точку P малой поверхностью Σ и заключенный в ней объем

$\Delta\Omega$ исключим из объема интегрирования Ω в (1.98). Соответственно поверхность Σ (ср. рис. 2) будем рассматривать как часть поверхности S . Нормаль к малой сфере Σ обозначим через \mathbf{N} и направим ее внутрь объема. Применяя теперь преобразование Грина (1.99) к (1.98), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} d\Sigma \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial N} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_1+S_2} dS \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) + \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \left(\varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x^*} - \chi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^*} \right). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Второй интеграл справа позволяет произвести интегрирование по времени:

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = \\ = \int_{\Omega} d\Omega \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Но если стремить t_1 к $-\infty$, а t_2 к $+\infty$ так, что $t_1 + R/c < 0$, а $t_2 + R/c > 0$, то в силу выбранного нами вида χ (δ -функция) и χ , и $\partial \chi / \partial t$ при t_1 и t_2 равны нулю. Поэтому $I_2 = 0$.

Рассмотрим теперь первый интеграл справа:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_1+S_2} dS \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^*} \right) \delta + \right. \\ \left. + \varphi \frac{1}{R^*} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{1}{c} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\delta}{R^*} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Интегрируя здесь второй член по времени, по частям, и пользуясь свойством δ (1.97), получаем:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{S_1+S_2} dS \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^*} \right) \varphi_{t=-R/c} - \frac{1}{R^*} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{t=-R/c} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c} \frac{1}{R^*} \frac{\partial R}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=-R/c} \right\}, \end{aligned} \quad (1.103)$$

где φ , $\partial\varphi/\partial n$, $\partial\varphi/\partial t$ взяты в момент $t = -R/c$. Подобным же образом третий интеграл справа в (1.100) дает:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \left(\varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x^*} - \chi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^*} \right) = \\ &= \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^*} \chi \right) \right\} = \\ &= \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_1+S_2+\Sigma} \varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} dS_x - \int_{\Omega} d\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} \frac{\partial (t+R/c)}{R^*} \right\} = \\ &= -\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \int_{S_1+S_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=-R/c} \cdot \frac{1}{R^*} dS_x, \quad (1.104) \end{aligned}$$

где dS_x — проекция площадки ndS на скорость потока V (на ось Ox). Интеграл в (1.100) слева преобразуется точно так же, как первый, и так как в этом случае $\partial/\partial N$ тождественно $\partial/\partial R^*$, то мы имеем:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} d\Sigma \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial N} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) = \\ &= \int_{\Sigma} d\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial R^*} \left(\frac{1}{R^*} \right) \varphi_{t=-R/c} - \frac{1}{R^*} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_{t=-R/c} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c} \frac{1}{R^*} \frac{\partial R}{\partial R^*} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=-R/c} \right\}; \quad (1.105) \end{aligned}$$

имея в виду, что

$$\int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{R^{*2}} = 4\pi,$$

при стремлении радиуса сферы R^* к нулю получим:

$$I_0 = -4\pi\varphi_{t=0}. \quad (1.105')$$

Таким образом, слева получим значение потенциала в точке P в момент времени $t=0$. Так как этот момент произволен, то, сдвигая всюду отсчет времени на t вперед

и собирая все интегралы I_1, I_2, I_3 , находим, что потенциал в точке P в момент времени t будет равен

$$\varphi_P(t) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{R^*} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^*} \right) [\varphi] + \frac{1}{cR^*} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \right\} dS - \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \int \frac{1}{R^*} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] dS_{\infty}. \quad (1.106)$$

Здесь скобки $[]$ обозначают, что стоящая внутри них величина взята в момент времени $t - R/c$.

При $V=0$ ($\beta=0$) $R^*=r$, $R=r$, и эта формула превращается в обычную формулу Кирхгофа для покоящейся среды.

Если потенциал гармонически зависит от времени так, что

$$\varphi = \psi e^{i\omega t}, \quad (1.107)$$

то для амплитуды ψ подстановкой (1.107) в (1.106) получим:

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R^*} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R^*} \right) \right\} dS - \\ - \frac{2i\beta k}{4\pi \sqrt{1-\beta^2}} \int \psi \frac{e^{-ikR}}{R^*} dS_{\infty}, \quad (1.108)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число. Если по существу физической задачи можно считать, что возмущения, возбудившие колебания, начались внутри поверхности S_1 и не бесконечно давно, то они не успеют распространиться до поверхности S_2 , удаленной от S_1 . Поэтому мы можем, отодвигая S_2 в бесконечность, считать, что на ней значения φ , $\partial\varphi/\partial n$, $\partial\varphi/\partial t$ равны нулю. Объем Ω тогда охватит все пространство, за исключением находящегося внутри S_1 . Если «забыть» о наличии бесконечно удаленной поверхности, то естественно теперь назвать нормаль n внутренней, так как она направлена внутрь поверхности S_1 , внутри которой по нашему теперешнему предположению сосредоточены источники колебания. При указанном условии можно считать, что формулы (1.108) и (1.106) дают выражение потенциала в любой точке пространства через значения φ , $\partial\varphi/\partial n$, $\partial\varphi/\partial t$ на поверхности S_1 , внутри которой (или на ней) сосредоточены источники звука.

В заключение мы рассмотрим некоторое обобщение этой теоремы на тот случай, когда имеются «объемные»

источники звука. Именно, мы предположим, что уравнение (1.94) имеет правую часть, которую и будем рассматривать как «объемный источник звука». Силу этого источника обозначим через Q . Тогда уравнение (1.94) запишется в виде

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^*} = -4\pi Q. \quad (1.94')$$

С подобными уравнениями мы встречаемся, например, в проблеме рассеяния звука турбулентным потоком (ср. § 12). Применяя к этому уравнению те же операции, что применялись нами к уравнению (1.94), мы получим выражение для φ , отличающееся от (1.106) и (1.108) объемным интегралом. Очевидно, что дополнительный член при умножении (1.94) на χ будет

$$I_4 = -4\pi \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\Omega Q \chi; \quad (1.109)$$

интегрируя по t , получим (в силу δ -образного вида χ):

$$I_4 = -4\pi \int_{\Omega} d\Omega Q_{t=R/c} \cdot \frac{1}{R^*}. \quad (1.109')$$

Поэтому вместо (1.106) и (1.108) будем теперь иметь:

$$\varphi_P(t) = \int_{\Omega} \frac{[Q]}{R^*} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{R^*} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^*} \right) [\varphi] + \right. \\ \left. + \frac{1}{cR^*} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \right\} dS - \frac{2\beta}{4\pi \sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \int_S \frac{1}{R^*} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] dS_x, \quad (1.106')$$

$$\psi_P = \int \frac{Q_0 e^{-ikR}}{R^*} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R^*} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R^*} \right) \right\} dS - \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{2i\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \psi \frac{e^{-ikR}}{R^*} dS_x, \quad (1.108')$$

если сила источника гармонически зависит от времени,

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}. \quad (1.110)$$

Выведенные здесь теоремы мы используем в теории распространения звука от движущегося источника, в частности от пропеллера самолета, и в проблеме возникновения вихревого звука при движении тел в воздухе.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В АТМОСФЕРЕ И ВОДЕ

§ 7. Геометрическая акустика

При изучении распространения звука в атмосфере или в воде мы обычно встречаемся с таким положением дел, когда состояние среды мало меняется на протяжении длины волны звука λ . Правда, на фоне этого медленного изменения состояния среды могут иметь место и более мелкие изменения, но они вызывают вторичные эффекты, которые можно рассматривать особо (ср. § 12). Основные черты картины распространения звука определяются медленными изменениями в состоянии среды (например, изменениями в силе ветра, в температуре и плотности воздуха по мере удаления от поверхности Земли). При этих обстоятельствах целесообразно применение методов геометрической акустики. В этом параграфе мы и выведем основные уравнения геометрической акустики [13]. Мы будем исходить из основных уравнений акустики движущейся и неоднородной среды (§ 4). Эти уравнения гласят:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + [\text{rot } \xi, \mathbf{v}] + [\text{rot } \mathbf{v}, \xi] + \nabla(\mathbf{v}, \xi) = -\frac{\nabla \pi}{\rho} + \frac{\delta \nabla p}{\rho^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + (\xi, \nabla \rho) + (\mathbf{v}, \nabla \delta) + \rho \text{div } \xi + \delta \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \sigma) + (\xi, \nabla S) = 0, \quad (2.3)$$

$$\pi = c^2 \delta + h \sigma. \quad (2.4)$$

Теперь мы будем предполагать, что \mathbf{v} , p , ρ , S мало меняются на протяжении длины волны звука. Чтобы использовать этот факт для построения приближенной теории распространения звука, мы положим:

$$\xi = \xi_0 e^{i\Phi}, \quad \pi = \pi_0 e^{i\Phi}, \quad \delta = \delta_0 e^{i\Phi}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{i\Phi}, \quad (2.5)$$

$$\Phi = \omega t - k_0 \Theta, \quad (2.6)$$

где ω — частота звука, $k_0 = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$ есть волновое число в среде, состояние которой принимается за нормальное (c_0 — нормальная скорость звука); $k_0 \Theta$ есть фаза волны. Величины ξ_0 , π_0 , δ_0 , σ_0 будем считать медленно меняющимися функциями координат и, может быть, времени. Число k_0 будем считать большим, так что фаза $k_0 \Theta$ меняется, напротив, очень быстро. Решения для ξ_0 , π_0 , δ_0 , σ_0 будем искать в виде ряда по обратным степеням большого числа ik_0 :

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \xi'_0 + \frac{\xi''_0}{ik_0} + \dots, & \pi_0 &= \pi'_0 + \frac{\pi''_0}{ik_0} + \dots, \\ \delta_0 &= \delta'_0 + \frac{\delta''_0}{ik_0} + \dots, & \sigma_0 &= \sigma'_0 + \frac{\sigma''_0}{ik_0} + \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в уравнения (2.1), (2.2), (2.3) и пользуясь (2.4), мы найдем

$$ik_0 \left\{ q \xi_0 - \nabla \Theta \frac{\pi_0}{\rho} \right\} = b, \quad (2.8)$$

$$ik_0 \left\{ \frac{q}{c^2} \pi_0 - \frac{hq}{c^2} \sigma_0 - \rho (\xi_0, \nabla \Theta) \right\} = b_4, \quad (2.8')$$

$$ik_0 q \sigma_0 = b_5, \quad (2.8'')$$

где

$$q = c_0 - (\mathbf{v}, \nabla \Theta), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}b &= -\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + [\xi_0, \operatorname{rot} \mathbf{v}] + [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \xi_0] - \nabla (\mathbf{v}, \xi_0) - \\ &\quad - \frac{\nabla \pi_0}{\rho} + \frac{\nabla p}{\rho^2} \frac{\pi_0 - h \sigma_0}{c^2},\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}b_4 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi_0}{\partial t} - \frac{h}{c^2} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} - \left(\mathbf{v}, \nabla \frac{1}{c^2} \right) (\pi_0 - h \sigma_0) - \\ &\quad - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, (\nabla \pi_0 - \nabla h \cdot \sigma_0)] - (\nabla p, \xi_0) - \\ &\quad - \rho \operatorname{div} \xi_0 - \frac{\pi_0 - h \sigma_0}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{v},\end{aligned}\quad (2.10')$$

$$b_5 = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial t} - (\mathbf{v}, \nabla \sigma_0) - (\xi_0, \nabla S). \quad (2.10'')$$

Подставляя в (2.8), (2.8'), (2.8'') ξ_0 , π_0 , σ_0 из (2.7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ik_0 , мы получим

для нулевого приближения (коэффициент при нулевой степени ik_0):

$$q\xi'_0 - \nabla\Theta \frac{\pi'_0}{\rho} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{q}{c^2} (\pi'_0 - h\sigma'_0) - \rho (\xi'_0, \nabla\Theta) = 0, \quad (2.11')$$

$$q\sigma'_0 = 0, \quad (2.11'')$$

и для первого приближения (коэффициент при первой степени ik_0):

$$q\xi''_0 - \nabla\Theta \cdot \frac{\pi''_0}{\rho} = b', \quad (2.12)$$

$$\frac{q}{c^2} (\pi''_0 - h\sigma''_0) - \rho (\xi''_0, \nabla\Theta) = b'_4, \quad (2.12')$$

$$q\sigma''_0 = b'_5. \quad (2.12'')$$

Причем b' , b'_4 , b'_5 суть значения b , b_4 , b_5 при подстановке в них нулевого приближения ξ'_0 , π'_0 , σ'_0 из (2.11), (2.11') и (2.11'').

Из уравнения (2.11'') следует, что $\sigma'_0 = 0$, т. е. в нулевом приближении геометрической акустики звук распространяется без изменения энтропии (изоэнтропически).

Решая уравнения (2.11), (2.11'), (2.11''), получаем, во-первых, уравнения, связывающие скорость колебаний с давлением:

$$\xi'_0 = \nabla\Theta \cdot \frac{\pi'_0}{\rho q}, \quad (2.13)$$

и в качестве условия совместности (2.11) и (2.11') находим уравнение поверхности постоянной фазы ($\Theta = \text{const}$):

$$|\nabla\Theta|^2 = q^2/c^2. \quad (2.14)$$

При $v=0$, как видно из (2.9), $\frac{q^2}{c^2} = \frac{c_0^2}{c^2} = \mu^2$, где μ есть показатель преломления для звуковых волн. Уравнение

$$|\nabla\Theta|^2 = \mu^2$$

называют уравнением эйконала. При $v \neq 0$ отношение q/c можно также рассматривать как показатель преломления среды, но зависящий теперь и от направления распространения волн.

Положение сходно с положением в кристаллооптике. Однако оно является более сложным, потому что в случае акустики среда не только анизотропна, но еще и неоднородна, так как положение оси совпадает с направлением ветра или течения, которые меняются от точки к точке. Подставляя в (2.14) q из (2.9) и решая (2.14) относительно $|\nabla\Theta| = \partial\Theta/\partial n$, где $\partial\Theta/\partial n$ означает дифференцирование по направлению нормали к поверхности постоянной фазы ($\Theta = \text{const}$), мы получим:

$$|\nabla\Theta| = \frac{\partial\Theta}{\partial n} = \frac{c_0}{c + v_n}, \quad (2.15)$$

где v_n есть проекция скорости ветра на нормаль к волне.

Зная $\partial\Theta/\partial n$, мы можем теперь определить и фазовую скорость волн V_f . Уравнение движущейся поверхности фазы есть

$$\Phi = \omega t - k_0 \Theta = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим:

$$\omega - k_0 \frac{\partial\Theta}{\partial n} \frac{dn}{dt} = \omega - k_0 \frac{\partial\Theta}{\partial n} V_f = 0. \quad (2.16)$$

На основании (2.15) отсюда получается:

$$V_f = c + v_n, \quad (2.17)$$

т. е. фазовая скорость волн равна местной скорости звука плюс проекция скорости ветра на нормаль к волне. Это кинематическое соотношение пояснено на рис. 3; формула (2.17), получающаяся у нас как вывод из строгой теории, была положена Р. Эмденом [14] в основу геометрической теории распространения звука в качестве одного из исходных положений.

Но существенно не только найти геометрию волнового поля, но и вычислить величины, характеризующие интенсивность звука. Из уравнений геометрической акустики (2.11), (2.12), как мы сейчас покажем, само собой получается уравнение для определения звукового давления π_0 .

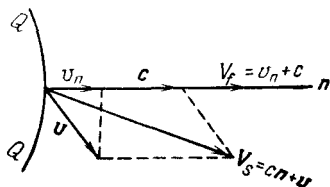


Рис. 3.

Это как раз та величина, которая обычно измеряется на опыте. Для того чтобы найти это уравнение, обратимся к уравнениям первого приближения (2.12). Как видно, левые части этих уравнений совпадают с уравнениями (2.11). Если ввести обозначения $\xi'_0 = (x'_1, x'_2, x'_3)$, $\pi'_0 = x'_4$, $\sigma'_0 = x'_5$ и записать уравнения (2.11) в виде

$$\sum_{k=1}^5 a_{ik} x'_k = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (2.18)$$

то уравнения (2.12) запишутся в виде

$$\sum_{k=1}^5 a_{ik} x''_k = b'_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (2.18')$$

В силу известной теоремы алгебры уравнения (2.18') будут иметь решения x''_k только в том случае, если их правые части ортогональны к решениям y_k сопряженной системы уравнений

$$\sum_{k=1}^5 \tilde{a}_{ik} y_k = 0, \quad \text{где } \tilde{a}_{ik} = a_{ki}. \quad (2.19)$$

Условие ортогональности гласит:

$$\sum_{k=1}^5 b'_k y_k = 0. \quad (2.20)$$

Найдя a_{ik} из (2.11), (2.11'), (2.11''), образовав \tilde{a}_{ik} , получим из (2.19) y_k в виде

$$y = \rho \nabla \Theta, \quad y_4 = q, \quad y_5 = \frac{h}{c^2} q, \quad (2.21)$$

и тогда, подставляя в уравнение (2.20) b , b_4 , b_5 из (2.10), пользуясь (2.13), получим условие ортогональности (2.20) в раскрытом виде:

$$2 \frac{\partial \pi'_0}{\partial t} + \pi'_0 \operatorname{div} \mathbf{V}_s + 2 (\mathbf{V}_s, \nabla \pi'_0) - (\mathbf{V}_s, \nabla \ln \rho q c^2) \pi'_0 = 0, \quad (2.22)$$

причем скорость \mathbf{V}_s равна (см. рис. 3)

$$\mathbf{V}_s = c \mathbf{n} + \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

Здесь \mathbf{n} есть единичный вектор по нормали к поверхности постоянной фазы.

Опуская теперь значки у π'_0 , ξ_0 , так как в дальнейшем мы будем иметь дело с нулевым приближением, мы помножим уравнение (2.22) на π и получим тогда уравнение для квадрата амплитуды давления:

$$\frac{\partial \pi^2}{\partial t} + \operatorname{div} (V_s \pi^2) = (V_s, \nabla \ln \rho q c^2) \pi^2, \quad (2.24)$$

которое совместно с (2.13),

$$\xi = \nabla \Theta \frac{\pi}{\rho q}, \quad (2.25)$$

полностью решает задачу о нахождении звукового давления π и скорости звуковых колебаний ξ . Уравнение (2.24) можно рассматривать также как некоторый закон сохранения. В самом деле, определим среднюю кинетическую энергию звуковых колебаний T формулой:

$$T = \frac{1}{2} \overline{(\rho + \delta)(v + \xi)^2} - \frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \overline{\xi^2} + \overline{\delta(v, \xi)}, \quad (2.26)$$

где остальные члены отбрасываем либо как величины третьего порядка малости, либо как величины, которые в рамках линейной теории в среднем должны дать нуль (например, $\rho \overline{(v, \xi)}$). Имея в виду, что $\delta = \pi/c^2$ (ср. (2.4)), получим:

$$T = \frac{1}{2} |\nabla \Theta|^2 \frac{\pi^2}{\rho q^2} + (v, \nabla \Theta) \frac{\pi^2}{\rho q c^2}. \quad (2.27)$$

Прибавляя сюда среднюю потенциальную энергию второго порядка U ,

$$U = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\rho c^2}, \quad (2.28)$$

получим на основании (2.9) и (2.14):

$$\varepsilon = T + U = \frac{\pi^2 c_0}{\rho q c^2}. \quad (2.29)$$

Если уравнение (2.24) разделить на $\rho q c^2/c_0$, то после простой выкладки получим:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} (\varepsilon V_s) = 0, \quad (2.30)$$

т. е. закон сохранения средней энергии в геометрической акустике. Этот закон, подобно закону для ε_1 и N_1 (см. § 3),

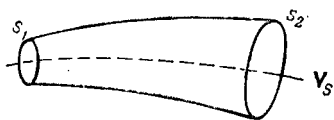
замечателен тем, что он содержит лишь величины, характерные для линейной акустики. Он справедлив для любой неоднородной и движущейся среды, если только длина волны звука достаточно мала, так что применимы приближения геометрической акустики.

Величина ϵV_s есть, очевидно, средний поток энергии:

$$N = \epsilon V_s. \quad (2.31)$$

Отсюда непосредственно следует, что звуковая энергия распространяется со скоростью $V_s = cn + v$, отличной от фазовой скорости V_f . Скорость V_s мы будем называть *лучевой*. Эта скорость равна геометрической сумме местной скорости звука cn и скорости ветра v . Она совпадает со скоростью слабых разрывов по Адамару [15].

На основании (2.23) и (2.25) поток энергии можно также представить в виде



$$N = \left(\pi \xi^2 + \frac{\pi^2}{\rho c^2} v \right) \frac{c_0}{q}. \quad (2.31')$$

Рис. 4.

При $v=0$ $q=c_0$, и мы получаем выведенную ранее (§ 3) формулу для потока: $N = \pi \xi^2$ (выражение $N_1 = \pi_1 \xi_1^2$ отличается, однако, от $N = \pi \xi^2$, так как последний вектор представляет среднее по времени значение потока энергии, а N_1 — его мгновенное значение). Если процесс стационарен, так что средняя энергия звукового поля не меняется (по крайней мере там, где звуковое поле уже заполнило пространство), то из (2.30) получаем:

$$\operatorname{div}(\epsilon V_s) = 0. \quad (2.30')$$

Из этого уравнения следует, что если построить трубки, боковые поверхности которых образованы линиями, вдоль которых направлена лучевая скорость («лучевые трубки», рис. 4), то произведение $\epsilon V_s s$ (s — поперечное сечение трубки) постоянно:

$$\epsilon V_s s = \text{const.} \quad (2.32)$$

Внося сюда значение ϵ из (2.29), находим:

$$\pi^2 V_s s = \pi_1^2 V_{s1} s_1 \frac{\rho q c^2}{\rho_1 q_1 c_1^2}, \quad (2.33)$$

где π_1 , V_{s1} , s_1 , ρ_1 , q_1 и c_1 суть значения этих величин в каком-либо избранном сечении трубки. Это уравнение позволяет вычислять давление звука в любой части лучевой трубки, коль скоро оно известно в каком-либо ее сечении. Для нахождения же геометрии лучевых трубок требуется решение задачи геометрической акустики [уравнение эйконала (2.14)].

§ 8. Простейшие случаи распространения звука

А. Распространение в изотермической атмосфере. В спокойной изотермической атмосфере скорость звука постоянна (так как она зависит только от температуры). Таким образом, $c=c_0=\text{const.}$ Величина $q=c_0$ (так как $v=0$). Стало быть, из (2.33) при рассматриваемых условиях получаем:

$$\pi^2 s = \pi_1^2 s_1 \rho / \rho_1. \quad (2.34)$$

В специальном случае плоской волны сечение трубок постоянно ($s=s_1$), и мы находим:

$$\pi = \pi_1 (\rho / \rho_1)^{1/2}, \quad (2.35)$$

т. е. давление звука изменяется прямо пропорционально корню квадратному из плотности среды. Отношение ρ / ρ_1 в изотермической атмосфере определяется барометрической формулой:

$$\rho / \rho_1 = e^{-\kappa H}; \quad (2.36)$$

здесь $\kappa = Mg/RT$, H — высота, M — молекулярный вес воздуха, g — ускорение силы тяжести, R — газовая постоянная граммолекулы, T — температура. Из (2.35) и (2.36) видно, что давление будет убывать с высотой по экспоненциальному закону.

Если волна не плоская, а сферическая, то сечение трубок возрастает пропорционально квадрату расстояния до источника r^2 . В силу этого для сферической волны вместо (2.35) получим:

$$\pi = \pi_1 \frac{r_1}{r} (\rho / \rho_1)^{1/2}. \quad ((2.35'))$$

Что же касается скорости звуковых колебаний ξ , то она будет, в отличие от давления, нарастать. В самом деле,

для плоской волны $\nabla\Theta = \mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор в направлении нормали к волне), а поэтому из (2.25) и (2.35) следует:

$$\xi = \mathbf{n} \frac{\pi_1}{\rho c_0} (\rho/\rho_1)^{1/2} = \mathbf{n} \frac{\pi_1}{\rho_1 c_0} (\rho_1/\rho)^{1/2}. \quad (2.37)$$

Средний поток энергии

$$N = \pi \xi = \mathbf{n} \frac{\pi_1^2}{\rho_1 c_0} \quad (2.38)$$

остается постоянным. Подобным же образом для сферической волны получится:

$$\xi = \mathbf{n} \frac{\pi_1}{\rho_1 c_0} \frac{r_1}{r} (\rho_1/\rho)^{1/2}, \quad (2.37')$$

$$N = \pi \xi = \mathbf{n} \frac{r_1^2}{r^2} \frac{\pi_1^2}{\rho_1 c_0}, \quad (2.38')$$

где \mathbf{n} — опять единичный вектор по нормали к волне, т. е. по направлению луча, исходящего из источника.

В. Случай наличия градиента температуры. Пусть температура T является функцией высоты y . Тогда скорость звука c будет меняться по закону

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}, \quad (2.39)$$

а показатель преломления звуковых волн μ будет

$$\mu = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}. \quad (2.40)$$

Уравнение поверхности постоянной фазы (уравнение эйконала) в отсутствие ветра согласно (2.14) гласит:

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = \mu^2 = \frac{T_0}{T} \quad (2.41)$$

(мы направляем ось Ox горизонтально (рис. 5) в плоскости луча звука и поэтому считаем, что Θ от z не зависит). Косинус угла φ между осью Ox и нормалью к волне будет

$$\cos \varphi = \frac{\partial\Theta}{\partial x} / \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.42)$$

Положим $\partial\Theta/\partial x = \cos \varphi_0$, где φ_0 — значение φ при $y=0$, т. е. на поверхности земли, где $T=T_0$. Из (2.41) и (2.42) тогда найдем:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 \cdot \sqrt{T/T_0}. \quad (2.43)$$

Из этой формулы видно, что если, как это бывает обычно, температура падает с высотой, то $\cos \varphi$ будет уменьшаться по абсолютной величине, а следовательно, луч будет отклоняться от первоначального направления вверх (рис. 5). Пользуясь формулой (2.43), если известно распределение температуры по слоям, легко построить всю кривую луча.

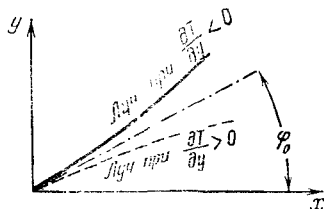


Рис. 5.

С. Распространение звука при слоистом ветре. Рассмотрим теперь тот случай, когда в среде с постоянной температурой и плотностью имеется горизонтальный ветер (пусть он будет по направлению оси Ox), сила которого меняется с высотой. Пусть скорость ветра есть

$$v = v(y). \quad (2.44)$$

Тогда, согласно (2.9), величина q равна

$$q = c_0 - v(y) \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad (2.45)$$

и на основании (2.14) уравнение эйконала будет:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 = \frac{q^2}{c^2} = \left[1 - \gamma(y) \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right]^2, \quad (2.46)$$

где $\gamma(y) = v(y)/c_0$.

Скорость ветра у самой поверхности земли ($y=0$) будем считать равной нулю, $\gamma(0)=0$. Полагая так же, как это сделано в (В), отправной угол нормали к волне равным φ_0 , положим $\partial\Theta/\partial x = \cos \varphi_0$, тогда из (2.46) найдем:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi_0}{|1 - \cos \varphi_0 \gamma|}. \quad (2.47)$$

Из этой формулы следует, что если луч ¹⁾ направляется по ветру ($\gamma \cos \varphi_0 > 0$), то при нарастании скорости ветра с высотой $\cos \varphi$ растет так, что луч отклоняется к земле (рис. 6), а луч, идущий против ветра, отклоняется вверх.

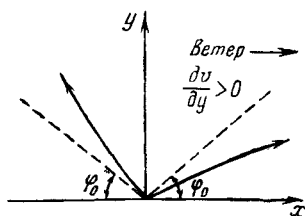


Рис. 6.

Это последнее обстоятельство является одной из причин ухудшения слышимости при ветре.

В самом деле, рассмотрим луч, который в отсутствие ветра почти скользит по поверхности земли (рис. 7). При наличии ветра, сила которого растет с высотой, этот луч отклоняется вверх и минует приемник P . Конечно, это не значит, что в P не будет ничего слышно, так как туда будут достигать другие лучи, но сила звука будет значительно ослаблена (малое число лучей!). Если сила ветра падает с высотой, то такое же положение будет при распространении звука по ветру.

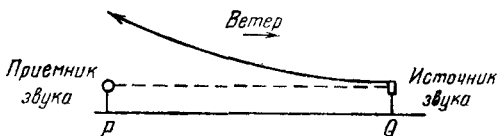


Рис. 7.

В тех случаях, когда не только сила ветра, но и его направление меняются от слоя к слою, картина распространения звука значительно усложняется, так как лучи будут кривыми двойкой кривизны.

§ 9. Распространение звука в реальной атмосфере. Зоны молчания

В условиях реальной атмосферы все рассмотренные нами факторы (ветер, температурный градиент) действуют одновременно и притом весьма сложным образом, так как

¹⁾ При наличии ветра, как указывалось уже выше, линия луча отличается от линии нормали. Однако, поскольку $v/c \ll 1$, это различие невелико.

ход температуры, силы и направления ветра может быть весьма разнообразным. В общем случае направляющие косинусы нормали к волне α , β , γ определяются опять-таки из уравнения (2.14). Имея в виду, что $c_0/c = \sqrt{T_0/T}$, $q = c_0 - (\nabla\Theta, \mathbf{v})$, мы получим

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial\Theta}{\partial x} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \left(1 - \frac{(\nabla\Theta, \mathbf{v})}{c_0}\right)^{-1}, \\ \beta &= \frac{\partial\Theta}{\partial y} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \left(1 - \frac{(\nabla\Theta, \mathbf{v})}{c_0}\right)^{-1}, \\ \gamma &= \frac{\partial\Theta}{\partial z} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \left(1 - \frac{(\nabla\Theta, \mathbf{v})}{c_0}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Таким образом, для их определения требуется знать функцию Θ из уравнения (2.14).

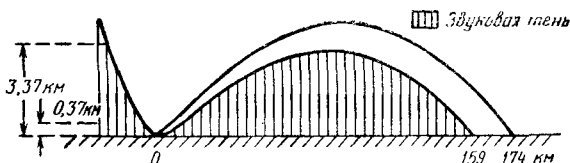


Рис. 8.

Как можно было усмотреть из формул предыдущего параграфа, существенную роль для распространения звука имеют не столько температура и сила ветра, сколько их изменения. На самом деле оказывается, что ничтожные градиенты температуры или силы ветра приводят к значительным искривлениям звуковых лучей.

Мы приведем здесь несколько иллюстраций, заимствованных нами из статей Р. Эмдена [14]. На рис. 8 изображен случай распространения звука в атмосфере, в которой температура падает на $6,2^\circ\text{C}$ на 1 км; над поверхностью земли до высоты 370 м предполагается штиль, а далее скорость ветра растет на 4 м/с на 1 км. В этом случае, как видно, образуется обширная «зона молчания», лежащая справа на рисунке по ветру от источника звука. Звук достигает поверхности земли только на значительном расстоянии от источника звука (за 159 км). Подобные же области звуковых теней приведены на рис. 9, где

демонстрированы звуковые лучи, распространяющиеся в атмосфере, в которой до высоты 910 м температура падает на 3° , ветер увеличивается на 2,13 м/с, а выше температура падает на $3,65^\circ\text{C}$ на 1 км и скорость ветра также падает на 3,28 м/с на 1 км. Впервые зоны молчания были наблюдаемы в прошлую империалистическую

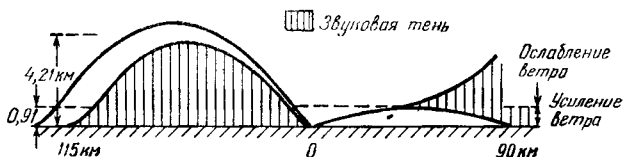


Рис. 9.

войну, когда было обнаружено, что слышимость артиллерийской канонады бывала большей в местах, более удаленных от источника звука, нежели в соседстве с ним.

Весьма изящные и подробные расчеты распространения фронта звуковой волны в неоднородной атмосфере при наличии ветра читатель может найти в работе нашего соотечественника С. В. Чибисова [16], в которой приведены также примеры зон молчания.

Заметим, что фигурирующая в работе С. В. Чибисова скорость распространения слабых разрывов (по Адамару) совпадает [12] с введенной нами выше (§ 7) лучевой скоростью V_s . Не имея здесь возможности подробнее входить в вычислительные проблемы воздушной сейсмики, мы ограничились наше изложение этих вопросов приведенными выше иллюстрациями и ссылками.

§ 10. Турбулентность атмосферы

В предыдущем параграфе мы рассмотрели распространение звука в среде, состояние которой мало меняется на протяжении длины волны звука. В реальной атмосфере такой способ рассмотрения дает лишь самые основные черты распространения звука. На самом деле, помимо медленного изменения состояния атмосферы от одного слоя к другому, имеют место и более быстрые изменения, вызванные случайными флуктуациями скорости ветра —

турбулентностью атмосферы. Эти изменения могут быть весьма быстрыми, и их влияние на распространение звука далеко не всегда может быть рассмотрено методами геометрической акустики, так как размеры областей, в которых происходит заметное изменение состояния среды, могут быть вполне сравнимы с длиной волны звука.

Прежде чем рассматривать влияние этих явлений на распространение звука, мы познакомимся в этом параграфе с основными закономерностями турбулентного движения. Теория турбулентности образует весьма обширную и далеко еще не полностью разработанную область гидро- и аэродинамики. В конце книги читатель найдет ссылки на основную литературу по этому вопросу.

Работы наших русских ученых А. Н. Колмогорова, М. Д. Миллионщикова и А. М. Обухова весьма способствовали в последнее время развитию теории турбулентности. Объем и назначение нашей книги не позволяют сколько-нибудь подробно осветить эти работы. Мы ограничимся изложением наиболее нужных для нас сведений и не будем претендовать на математическую строгость и последовательность.

Скорость в турбулентном потоке $v(x)$ является случайной функцией. Все поле скоростей такого потока может быть представлено как совокупность возмущений («вихрей») различных масштабов. Самые крупные вихри определяются размерами всего потока в целом L . Смысл величины L может быть весьма различен. Например, это может быть высота слоя воздуха над поверхностью земли, размеры обтекаемого тела, если турбулентность вызывается обтеканием такого тела первоначально ламинарным потоком, размерами трубы, из которой выходит струя, и т. п.

Эти крупномасштабные возмущения дробятся на более мелкие вихри, и размеры самых малых определяются вязкостью среды, так как очень резкие изменения в движении среды быстро затухают именно благодаря вязкости (см. диссипативную функцию Q , введенную нами в § 1, из которой видно, что энергия потока, превращаемая благодаря действию вязкости в тепло, тем больше, чем больше градиенты скорости потока).

Такая картина распределения скоростей турбулентного потока по различным масштабам возмущений с по-

следовательным превращением энергии крупных возмущений в энергию мелких и, наконец, в тепло была впервые ясно обрисована Ричардсоном.

Чтобы математически охарактеризовать спектральное распределение скорости турбулентного потока $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ по возмущениям различных масштабов, мы разложим скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в интеграл типа Фурье:

$$v_i(\mathbf{x}) = \int e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})} U_i(d\Omega(\mathbf{q})). \quad (2.49)$$

Здесь $v_i(\mathbf{x})$ означает компоненту скорости турбулентного потока ($i=1, 2, 3$ суть номера осей Ox, Oy, Oz); $\mathbf{q}(q_1, q_2, q_3)$ есть волновой вектор, принадлежащий масштабу $l=2\pi/q$; $d\Omega(\mathbf{q})$ — элемент объема в пространстве волновых векторов, содержащий точку \mathbf{q} . Наконец, $U_i(d\Omega(\mathbf{q}))$ есть (бесконечно малая) амплитуда Фурье, определяющая величину пульсаций скорости масштаба l . Она есть аддитивная функция объема $d\Omega$:

$$U_i(\Omega_1 + \Omega_2) = U_i(\Omega_1) + U_i(\Omega_2). \quad (2.49')$$

Если бы $v_i(\mathbf{x})$ было непрерывной функцией точки \mathbf{x} , то мы могли бы написать: $U_i(d\Omega(\mathbf{q})) = v_i(\mathbf{q}) d\Omega$ — «плотность» скорости в пространстве \mathbf{q} , и тогда свойство аддитивности было бы тривиально, так как

$$\begin{aligned} U_i(\Omega_1 + \Omega_2) &= \int_{\Omega_1 + \Omega_2} v_i d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_1} v_i d\Omega + \int_{\Omega_2} v_i d\Omega = U_i(\Omega_1) + U_i(\Omega_2). \end{aligned} \quad (2.43'')$$

Однако плотность $v_i(\mathbf{q})$ может не существовать, а свойство аддитивности, как более общее, сохранится (пример — разрывные функции).

В частности, у нас $U_i(d\Omega)$ является случайной функцией (в пространстве \mathbf{q}) и не может вообще претендовать на непрерывность. Поэтому нам приходится пользоваться не интегралом Фурье, а более общим разложением (2.49) ¹⁾.

¹⁾ По поводу математического обоснования разложения случайной функции в интеграл (2.49) см. работу А. Н. Колмогорова [18]. В дальнейшем мы следуем (в основном) изложению А. М. Обухова [19]. К тем же результатам, но несколько иным путем пришел также А. Н. Колмогоров [20].

Относительно статистических свойств U_i сделаем следующие предположения:

1) Пульсации скорости, принадлежащие различным масштабам, статистически независимы, так что среднее от $U_i(\Omega_1)U_k^*(\Omega_2)$ равно нулю:

$$\overline{U_i(\Omega_1)U_k^*(\Omega_2)} = 0, \quad (2.50)$$

если объемы Ω_1 и Ω_2 не перекрываются (что и означает, что рассматриваемые U_i и U_k принадлежат разным \mathbf{q}). Звездочка (*) означает комплексную сопряженность.

2) Для совпадающих объемов допускаем, что

$$\overline{U_i(\Omega_1)U_k^*(\Omega_1)} = \Phi_{ik}(\Omega_1) \quad (2.51)$$

есть аддитивная функция области Ω . Физически это означает, что интенсивности, принадлежащие различным масштабам турбулентности, складываются. Так как Φ_{ik} есть некоторая средняя величина, то она может быть гладкой функцией, и ее можно выразить через «плотность» ψ_{ik} :

$$\Phi_{ik}(\Omega) = \int_{\Omega} \psi_{ik}(\mathbf{q}) d\Omega. \quad (2.52)$$

Величину ψ_{ik} будем называть спектральным тензором, так как он определяет, как будет видно из дальнейшего, распределение энергии в турбулентном потоке по различным масштабам пульсаций $l=2\pi/q$. Если нас интересует не полная скорость турбулентного потока, а только та часть ее $\mathbf{v}^p(\mathbf{x})$, которая относится к пульсациям скорости, имеющим масштаб, меньший $l=2\pi/p$, то выражение для $\mathbf{v}^p(\mathbf{x})$ получится из (2.49), если распространить там интегрирование по \mathbf{q} на область $q > p$:

$$\mathbf{v}_i^p(\mathbf{x}) = \int_{q>p} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})} U_i(d\Omega(\mathbf{q})). \quad (2.53)$$

Определим теперь «моменты связи» $M_{ik}^p(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ формулой:

$$M_{ik}^p(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \overline{v_i^p(\mathbf{x}') v_k^p(\mathbf{x}'')}, \quad (2.54)$$

т. е. как среднее от произведения двух компонент скорости v_i^p и v_k^p , взятых в двух различных точках простран-

ства \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' . Совокупность величин $M_{ik}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ ($i, k = 1, 2, 3$) образует тензор моментов связи. Для однородной турбулентности, т. е. такой, что состояния потока в различных точках пространства в среднем не отличаются друг от друга, тензор моментов связи будет зависеть лишь от разности векторов \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' , т. е. от $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}''$. Подставляя $v_i^p(\mathbf{x})$ из (2.53) в (2.54), получим:

$$M_{ik}^p(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\int_{\mathbf{q}' \geq p} \exp[i(\mathbf{q}', \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho})] U_i(d\Omega(\mathbf{q}')) \cdot \int_{\mathbf{q}'' \geq p} \exp[-i(\mathbf{q}'', \mathbf{x})] U_k^*(d\Omega(\mathbf{q}''))}{(2.55)}$$

Если теперь воспользоваться статистической независимостью U_i и U_k , принадлежащих различным \mathbf{q} [условие (2.50)], и аддитивностью [условия (2.49'), (2.51) и (2.52)], то найдем:

$$M_{ik}^p(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\mathbf{q} > p} \exp[i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})] \psi_{ik}(\mathbf{q}) d\Omega. \quad (2.56)$$

Будем рассматривать движение несжимаемой жидкости, так что $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Из (2.53) тогда следует:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i^p(\mathbf{x}')}{\partial x'_i} = 0. \quad (2.57)$$

Применяя это соотношение два раза к (2.54) (один раз дифференцируем по \mathbf{x}' , другой раз по \mathbf{x}''), мы получим:

$$\sum_{i, k=1}^3 \frac{\partial^2 M_{ik}^p(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial x'_i \partial x''_k} = 0. \quad (2.58)$$

Отсюда и из (2.56) следует, что спектральный тензор $\psi_{ik}(\mathbf{q})$ должен иметь вид

$$\psi_{ik}(\mathbf{q}) = \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2} \right) f(q). \quad (2.59)$$

Свяжем теперь этот тензор с распределением энергии в турбулентном потоке по пульсациям различных масштабов l . Мы будем рассматривать энергию, отнесенную к еди-

нице массы, так что мерой энергии у нас будет $v^2/2$. Средняя энергия $E(p)$, относящаяся к пульсациям скорости, размеры которых меньше $l=2\pi/p$, будет равна:

$$E(p) = \frac{1}{2} \overline{(v^p(\mathbf{x}))^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{(v_i^p(\mathbf{x}))^2} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 M_{ii}^p(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{q>p} \psi_{ii}(q) d\Omega, \quad (2.60)$$

или, на основании (2.59),

$$E_+(p) = 4\pi \int_{q>p}^{\infty} f(q) q^2 dq. \quad (2.61)$$

Для определения вида $E(p)$ воспользуемся соображениями размерности. Мы будем считать наш поток не только однородным, но и изотропным (конечно, опять в среднем статистически). Турбулентное движение такого потока должно поддерживаться некоторым постоянным притоком энергии извне, например энергией солнечной радиации, вызывающей движение потоков воздуха.

Эта же энергия, поскольку речь идет о стационарном состоянии, диссипируется в турбулентном движении, превращаясь благодаря действию вязких напряжений в тепло. Обозначим диссипируемую в единицу времени энергию (на единицу массы газа) через D_0 . (Она же равна притоку энергии извне.) Размерность D_0 есть $L^2 T^{-3}$ ($\text{см}^2/\text{с}^3$). При установившейся однородной и изотропной турбулентности ее спектральный состав должен определяться притоком энергии, поддерживающей турбулентность, т. е. $E(p) = F(D_0, p)$. Представляя F в виде $D_0^n p^m$, мы получим формулу размерностей для определения n и m в виде

$$L^2 T^{-2} = (L^2 T^{-3})^n L^{-m}, \quad (2.62)$$

откуда $n = 2/3$, $m = -2/3$. Так как никаких других безразмерных комбинаций из D_0 и p образовать нельзя, то

$$E(p) = \text{const} \cdot D_0^{2/3} p^{-2/3}. \quad (2.63)$$

Более подробный анализ А. М. Обухова показывает, что $\text{const} = \sqrt[3]{2} \cdot x^{-2/3}$, где x — некоторое безразмерное число порядка 1; таким образом, в обозначениях А. М. Обухова

$$E(p) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{D_0}{x} \right)^{2/3} p^{-2/3}. \quad (2.63')$$

Так как $p = 2\pi/l$, то $E(p) \sim l^{2/3}$.

Этот закон, установленный А. М. Обуховым [19] и А. Н. Колмогоровым [20], обычно кратко называют «законом 2/3». Из него следует, что энергия однородной и изотропной турбулентности сосредоточивается преимущественно в области крупномасштабных пульсаций скорости. Величина энергии $E(l)$ ограничивается наибольшим масштабом турбулентности L , определяющим размер всего потока в целом. Для атмосферной турбулентности L есть высота наблюдения над поверхностью земли.

Дифференцируя (2.61) по p и пользуясь (2.63'), находим:

$$f(p) = \gamma p^{-11/3}, \quad \gamma = \frac{\sqrt[3]{2}}{6\pi} \left(\frac{D_0}{x} \right)^{2/3}, \quad (2.64)$$

и, следовательно, спектральный тензор равен:

$$\phi_{ik}(q) = \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2} \right) \gamma q^{-11/3}. \quad (2.65)$$

Вычислим еще в заключение средний квадрат разности компонент скоростей потока, взятых в двух различных точках пространства:

$$\overline{(v_i^p(\mathbf{x}') - v_i^p(\mathbf{x}''))^2} = 2 \overline{((v_i^p(\mathbf{x}'))^2 - v_i^p(\mathbf{x}) v_i^p(\mathbf{x}''))}. \quad (2.66)$$

На основании (2.54) имеем:

$$\overline{(v_i^p(\mathbf{x}') - v_i^p(\mathbf{x}''))^2} = 2 \{M_{ii}^p(0) - M_{ii}^p(\rho)\}. \quad (2.67)$$

Отсюда с помощью (2.56) находим:

$$\overline{(v_i^p(\mathbf{x}') - v_i^p(\mathbf{x}''))^2} = 2 \int_{\rho > 0}^{\infty} \{1 - \exp[i(\mathbf{q}, \rho)]\} \phi_{ii}(\mathbf{q}) d\Omega. \quad (2.67')$$

Вводя новые, безразмерные переменные $\alpha = q_1 \rho$, $\beta = q_2 \rho$, $\gamma = q_3 \rho$ ($d\Omega = \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{\rho^3}$, $(q, \rho) = \alpha \frac{\xi}{\rho} + \beta \frac{\eta}{\rho} + \gamma \frac{\zeta}{\rho}$, где ξ, η, ζ суть проекции ρ), и пользуясь (2.65), получим:

$$\overline{(v_i^p(\mathbf{x}') - v_i^p(\mathbf{x}''))^2} = K^2 \rho^{2/3}, \quad (2.68)$$

причем постоянная K^2 по порядку величины равна γ [ср. (2.64)].

А. М. Обухов [19] дает оценку величины γ из того, что энергия атмосферной турбулентности заимствуется из энергии солнечной радиации. По Бренту [21] 2% солнечной энергии превращается в энергию атмосферной турбулентности и таким путем диссипируется, превращаясь в тепло. Это дает $D_0 = 5$ эрг/с³, что приводит к значению $\gamma = 2,4$.

Все приведенные здесь результаты относятся к изотропной и однородной турбулентности. Ветер, дующий в реальных условиях, вряд ли можно рассматривать как изотропную турбулентность, если только не рассматривать все гигантские воздушные потоки в атмосфере сами по себе как явления турбулентности воздушной оболочки Земли.

Такая точка зрения, может быть, себя и оправдывает в метеорологии и геофизике, но она неудобна для наблюдателя, располагающего малым временем, чтобы следить за сменой погоды (по крайней мере в отношении ветра). Поэтому для коротких промежутков времени, в течение которых соблюдается постоянство среднего ветра, целесообразней рассматривать турбулентность как нечто накладывающееся на средний ветер (а смена «среднего» ветра будет лежать вне малых масштабов времени, в течение которых ведется наблюдение, например, в течение минут или часов.) При таком подходе выведенные выше формулы могут считаться справедливыми в системе координат, движущейся вместе со средним ветром. Однако значение постоянной γ или K^2 в (2.68) может зависеть тогда от абсолютной величины средней скорости ветра \bar{v} . Это, по-видимому, и наблюдается на опыте (см. об этом ниже).

§ 11. Флюктуация фазы звуковой волны из-за турбулентности атмосферы

Весьма интересные опыты по распространению звука в реальных условиях турбулентной атмосферы были произведены В. А. Красильниковым [22]. Его опыты, принципиальную сторону которых мы намерены осветить в этом параграфе, представляют интерес с двух точек зрения. Во-первых, они дают метод изучения атмосферной турбулентности, и, во-вторых, что имеет прямое

отношение к нашей теме, они проливают свет на законы распространения звука в турбулентной атмосфере. Последняя сторона дела имеет также, как мы увидим, отношение к точности работы пеленгационных акустических установок.

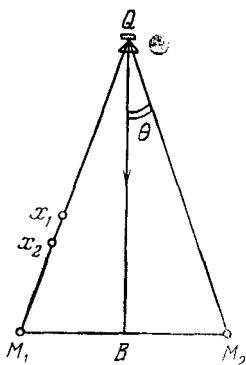


Рис. 10.

Суть опыта В. А. Красильникова заключается в следующем. В пункте Q помещается источник звука (решродуктор, рис. 10), на некотором расстоянии от него находятся два микрофона M_1 и M_2 . Расстояние $M_1M_2 = l$ есть база пеленгационной пары. Расстояние QB от источника

звуча до середины базы пусть будет L . Если бы база была повернута под некоторым углом к QB , отличным от 90° , то в силу различия расстояний QM_1 и QM_2 звуковая волна приходила бы в микрофоны M_1 и M_2 с различной фазой. Определяя то положение плеча M_1M_2 (объективным методом или по бинауральному эффекту), при котором эта разность фаз равна нулю, можно определить направление на источник Q . На этом и основаны акустические пеленгаторы. Однако указанная разность фаз может получиться и при «правильном» положении базы M_1M_2 (под углом 90° к QB), если физические условия распространения звука по двум лучам QM_1 и QM_2 различны. Как раз такое различие в условиях получается из-за турбулентности ветра.

Скорость ветра, от которой зависит фаза волны, является случайной функцией точки пространства; в силу этих случайных различий в скорости ветра на пути двух

лучей QM_1 и QM_2 разность фаз волн, приходящих в M_1 и M_2 , является также случайной величиной. Эта разность фаз ϕ и определялась в опытах В. А. Красильникова. В частности, определялось ее среднее квадратичное значение $\bar{\phi}^2$.

Как было показано выше (§ 7), фазовая скорость звука при наличии ветра равна $V_f = c + v_n$, где c — скорость звука, v_n — проекция скорости ветра на нормаль к волне. В нашем случае направления нормалей для лучей QM_1 и QM_2 мало отличаются от направления QB , которое мы примем за ось Ox . Обозначая проекцию скорости ветра на эту ось через v , получим $V_f = c + v$. Фаза волны, приходящей из Q в M_1 , будет

$$\varphi_1 = \omega \int_0^L \frac{dx}{c + v_1} = \varphi_0 - \frac{\omega}{c^2} \int_0^L v_1 dx \quad (2.69)$$

(мы пренебрегаем членами порядка v_1^2/c^2 и различиями между dx и $ds_1 = dx/\cos \theta$, ср. рис. 10); v_1 означает значение скорости на луче QM_1 . Подобное же выражение будем иметь для фазы в микрофоне M_2 . Для разности фаз находим:

$$\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{c^2} \int_0^L (v_1 - v_2) dx = \frac{\omega}{c^2} \int_0^L \Delta v dx, \quad (2.70)$$

где v_2 — значение проекции скорости на ось во втором луче (QM_2). Среднее значение ϕ , конечно, равно нулю. Мерой ϕ будет $\bar{\phi}^2$. Из (2.70) получаем:

$$\bar{\phi}^2 = \frac{\omega^2}{c^4} \int_0^L dx' \int_0^L dx'' \overline{\Delta v(x') \Delta v(x'')}. \quad (2.71)$$

Входящее под знак этого интеграла среднее равно:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta v(x') \Delta v(x'')} &= \overline{[v_1(x') - v_2(x')][v_1(x'') - v_2(x'')]} = \\ &= \overline{v_1(x') v_1(x'')} + \overline{v_2(x') v_2(x'')} - \overline{v_1(x') v_2(x'')} - \\ &\quad - \overline{v_1(x'') v_2(x')}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

На основании (2.66) и (2.68) имеем:

$$\overline{v_1^2} - \overline{v_1 v_2} = \frac{1}{2} K^2 r_{12}^2, \quad (2.73)$$

где r_{12} — расстояние между точками 1 и 2.

Пользуясь (2.73), получим из (2.72):

$$\overline{\Delta v(x') \Delta v(x'')} = -\frac{1}{2} K^2 \{r_{1'1''}^2 + r_{2'2''}^2 - r_{2'1''}^2 - r_{2''1'}^2\}. \quad (2.74)$$

Обращаясь теперь к рис. 10, мы видим, что

$$\left. \begin{aligned} r_{1'1''}^2 &= r_{2'2''}^2 = (x_1 - x_2)^2 (1 + \theta^2), \quad (\theta \ll 1), \\ r_{2'1''}^2 &= r_{2''1'}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 \theta^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Таким образом, из (2.71), (2.74) и (2.75) получаем:

$$\begin{aligned} \overline{\psi^2} &= \left(\frac{\omega}{c^2}\right)^2 K^2 \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \{[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 \theta^2]^{1/2} - \\ &\quad - (x_1 - x_2)^{2/3} (1 + \theta^2)^{1/3}\}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Вводя $x = x_1/L$, $y = x_2/L$, перепишем (2.76) в виде

$$\begin{aligned} \overline{\psi^2} &= \left(\frac{\omega}{c^2}\right)^2 K^2 L^{5/3} \theta^{1/3} \int_0^1 \frac{dx}{\theta} \times \\ &\times \int_0^1 dy \left\{ \left[\left(\frac{x-y}{\theta} \right)^2 + (x+y)^2 \right]^{1/2} - \left(\frac{x-y}{\theta} \right)^{2/3} (1 + \theta^2)^{1/3} \right\}. \end{aligned} \quad (2.76')$$

Если в фигурирующем здесь двойном интеграле ввести переменные $\xi = (x - y)/\theta$, $\eta = x + y$, то при $\theta \rightarrow 0$ он от θ не зависит и сходится к величине порядка 1. Поэтому

$$\overline{\psi^2} = \text{const} \cdot K^2 \left(\frac{\omega}{c^2}\right)^2 L^{5/3} \theta^{1/3}. \quad (2.77)$$

Обозначая длину базы $M_1 M_2$ через l и имея в виду, что $\theta = l/2L$, мы получим:

$$\sqrt{\overline{\psi^2}} = \text{const} \cdot K \frac{\omega}{c^2} L^{1/2} l^{1/6}. \quad (2.78)$$

Таким образом, среднее квадратичное флюктуации фазы пеленгатора пропорционально частоте звука ω , корню квадратному из расстояния до источника и примерно (степень 5/6) длине базы. Опытные данные В. А. Красильникова [22] весьма хорошо подтверждают как зависимость от ω (опыты произведены в интервале от 1000 до 5000 Гц), так и зависимость от l ($\sim l^{1/6}$). Весьма любопытно отметить, что постоянная K , по данным того же В. А. Красильникова, оказывается пропорциональной средней скорости ветра \bar{v} . К подобному же выводу приходят Гедике [23] и Финдесен [24], которые измеряли турбулентность атмосферы вблизи земли. Это находится в соответствии с нашим замечанием о том, что турбулентность атмосферы, если не прибегать к очень большим временам наблюдения, нельзя рассматривать как изотропную (§ 10).

Рассмотрим теперь вопрос об ошибке пеленга. Пусть направление на источник составляет угол α с направлением базы, тогда разность фаз в M_1 и M_2 в отсутствие турбулентности будет:

$$\phi = \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \alpha. \quad (2.79)$$

Случайная ошибка в α — $\delta\alpha$ в силу случайных флюктуаций ϕ будет:

$$\delta\alpha = \frac{\lambda}{2\pi l \sin \alpha} \delta\phi. \quad (2.80)$$

При больших значениях α ($\alpha \sim \pi/2$) для среднего квадратичного отклонения $\overline{\delta\alpha^2}$ найдем:

$$\sqrt{\overline{\delta\alpha^2}} = \frac{\lambda}{2\pi l} \sqrt{\overline{\delta\phi^2}} = \frac{\text{const}}{2\pi} K L^{1/2} l^{-1/6}. \quad (2.81)$$

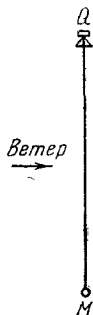
Пользуясь данными своих опытов, В. А. Красильников определяет численное значение постоянных, входящих в (2.81), следующим образом:

$$\sqrt{\overline{\delta\alpha^2}} = 0,3 l^{-1/6} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\bar{v}}{2,7} \right), \quad (2.82)$$

где α в градусах, l и L в метрах, а средняя скорость ветра

в м/с. Отсюда, например, при $l=1$ м, $\bar{v}=2,7$ м/с и $L=2000$ м получится $\sqrt{\overline{\delta\alpha^2}}=3^\circ$. Значение, если его сравнивать с наблюдающимися на практике ошибками акустических пеленгаторов, несколько преувеличенное.

Дело, очевидно, заключается в том, что акустические пеленгаторы работают обычно в диапазоне частот 200—500 Гц. Для этих низких частот приближение геометрической акустики, на которое опирались предыдущие расчеты, может уже оказаться мало пригодным.



В. А. Красильников [22] произвел также интересные наблюдения случайной изменчивости фазы во времени. Измерения производились в этом случае с помощью одного микрофона M , причем сравнивались значения фазы ϕ в два близлежащие момента времени, отделенные малым промежутком времени Δt . Результаты были обработаны для того случая, когда средний ветер перпендикулярен к лучу, соединяющему источник Q и микрофон M (рис. 11). Расчет произведен на основании упоминавшейся нами гипотезы (§ 10) об изотропности и однородности турбулентности в системе координат, движущейся вместе со средним ветром. Перейдем к этому расчету. За время Δt фаза в точке M изменится на

Рис. 11.

$$\Delta_t \phi = \frac{\omega}{c^2} \int_0^L \Delta v dx, \quad (2.83)$$

где Δv — изменение скорости за то же время. Отсюда

$$\overline{\Delta_t \phi^2} = \left(\frac{\omega}{c^2} \right)^2 \int_0^L dx' \int_0^L dx'' \overline{\Delta v(x') \Delta v(x'')}. \quad (2.84)$$

Главное изменение скорости v происходит из-за сноса турбулентности средним ветром, так что изменение скорости v за время Δt можно представлять как результат перемещения турбулентности на малое расстояние $\delta = \bar{v} \cdot \Delta t$.

Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\Delta v(x') \Delta v(x'')} &= \overline{[v(x', 0) - v(x', \delta)][v(x'', 0) - v(x'', \delta)]} = \\ &= \overline{v(x', 0)v(x'', 0)} + \overline{v(x', \delta)v(x'', \delta)} - \\ &\quad - \overline{v(x', \delta)v(x'', 0)} - \overline{v(x', 0)v(x'', \delta)}.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Пользуясь теперь «законом 2/3» от расстояния, получим:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta v(x') \Delta v(x'')} &= -\frac{K^2}{2} \{2(x' - x'')^{2/3} - 2[(x' - x'')^2 + \delta^2]^{1/3}\} = \\ &= K^2 \{(r^2 + \delta^2)^{1/3} - r^{2/3}\}; \quad r^2 = (x' - x'')^2.\end{aligned}\quad (2.86)$$

Подставляя это в (2.84) и применяя к получающемуся двойному интегралу те же рассуждения, что были применены к интегралу (2.76), мы найдем:

$$\overline{\Delta_t \psi^2} = \text{const} \cdot K^2 L^{1/3} \left(\frac{\omega}{c^2}\right)^2 \left(\frac{\delta}{L}\right)^{5/3}, \quad (2.87)$$

причем const оказывается равной примерно 3. Таким образом,

$$\sqrt{\overline{\Delta_t \psi^2}} = K \sqrt{3} L^{1/3} \frac{\omega}{c^2} (\bar{v} \Delta t)^{5/6}. \quad (2.88)$$

Опытные данные дают скорее зависимость $(\bar{v} \Delta t)^{4/6}$, нежели $(\bar{v} \Delta t)^{5/6}$. Пока трудно еще разъяснить происхождение этого отступления. Формула (2.88), поскольку $\overline{\Delta_t \psi^2}$, L , \bar{v} , Δt и ω известны из опыта, позволяет определить константу K в «закоме 2/3». При $\bar{v} = 6,5$ м/с из опыта получается: $K = 11 \text{ см}^{2/3} \cdot \text{с}^{-1}$.

Измерения турбулентности на высоте 2 м над землей, произведенные А. М. Обуховым и Н. Д. Ершовой, дают (при $\bar{v} = 3$ м/с) значение $K = 3,1 \text{ см}^{2/3} \cdot \text{с}^{-1}$.

Гедике [23] получает K (при $\bar{v} = 0,65$ м/с и высоте 1,15 м), равное $2,05 \text{ см}^{2/3} \cdot \text{с}^{-1}$. Стало быть, порядок величины K получается во всех случаях одинаковый. Но, очевидно, наличие роста постоянной K со скоростью ветра — факт, с которым нам еще придется встречаться в другой связи.

§ 12. Рассеяние звука в турбулентном потоке

Хорошо известен тот опытный факт, что при наличии ветра слышимость звуков сильно уменьшается. Уменьшение слышимости, о котором мы сейчас говорили, не является следствием искривления лучей в потоке ветра с градиентом скорости, которое мы рассматривали в §§ 8, 9. Оно имеет более сложную природу и связано с турбулентностью ветра. Впервые на эти явления в связи с возникновением акустических федингов указали Даль и Девик [25]. Это же явление акустических федингов было обнаружено Ю. М. Сухаревским при измерениях в горах (Эльбрусская экспедиция Академии наук СССР 1940 г.). На общее ухудшение слышимости при ветре указал также Стюарт [26].

Экспериментально вопрос наиболее обстоятельно был исследован Зигом [27], который показал существование при ветре дополнительного затухания звука, превосходящего затухание, связанное с молекулярными свойствами газа (вязкостью, теплопроводностью и эффектом Кнезера). Результаты Зига сводятся в основном к следующему. В интервале частот 250—4000 Гц при слабом ветре (1—2 м/с или при почти полном штиле) значительных колебаний интенсивности звука (федингов) не наблюдается, но интенсивность звука падает с увеличением расстояния. При этом коэффициент затухания α равен 1,5—2,2 дБ на 100 м¹). Зависимости от частоты коэффициента α Зиг не обнаруживает. Однако следует иметь в виду, что точность наблюдений Зига невелика, направленность источника учтена не была и условия, при которых снимались точки для разных частот, не вполне тождественны. Поэтому вряд ли этот результат является вполне достоверным. Скорее речь может идти лишь о порядке величины α , который в интервале 250—4000 Гц оказывается неизменным.

При сильном, порывистом ветре коэффициент затухания увеличивается, достигая величины 5—9 дБ на 100 м

¹) При этом вычтено молекулярное поглощение (эффект Кнезера с учетом влажности воздуха). Оно имеет заметное значение, начиная с частот в 1000 Гц. Классическое поглощение, обусловленное вязкостью и теплопроводностью, имеет значение лишь для частот, больших 10 000 Гц.

(при ветре порывами от 7 до 17 м/с). В этих условиях становится более заметной зависимость α от частоты, именно: α равно 5 дБ для 250 Гц, 8 дБ для 2000 Гц, 9 дБ для 4000 Гц (на 100 м). При этих же условиях наблюдаются фединги: колебания интенсивности достигают 25 дБ. Оба эти эффекта непринужденно объясняются теорией распространения звука в турбулентном потоке [28, 29]. При рассмотрении распространения звука в турбулентном потоке следует прежде всего иметь в виду, что те пульсации скорости потока, масштаб которых l значительно больше длины волны звука λ , не приводят к рассеянию звука. Они вызывают лишь изменения формы лучей и, следовательно, общее колебание интенсивности звука в месте нахождения приемника (фединги). Влияние этих крупномасштабных пульсаций может быть рассмотрено методом геометрической акустики. Поэтому скорость турбулентного потока следует разбить на две компоненты — v (макрокомпонента) и u (микрокомпонента):

$$v = \int_{q < q_0} e^{i(q, x)} U(d\Omega(q)), \quad u = \int_{q > q_0} e^{i(q, x)} U(d\Omega(q)), \quad (2.89)$$

причем v включает в себя среднюю скорость потока v_0 . Величина $q_0 = k/\mu$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число звуковой волны, а μ — безразмерное число $\gg 1$.

Мы рассмотрим теперь рассеяние звука из параллелепипеда L^3 , причем $L \gg \lambda$, $L \leq 2\pi/q_0$. При этом условии скорость v можно считать в этом объеме примерно постоянной.

Если перейти к местной системе координат, которая движется со скоростью v , то в ней частота звука f изменится (доплер-эффект) лишь на малую величину fv/c , частоты же турбулентных пульсаций в этой системе равны $v = u(l)/l$, где l — масштаб пульсаций, а $u(l)$ — скорость пульсаций, принадлежащих этому масштабу. Согласно «закону 2/3»

$$u^2 = \text{const} \cdot l^{2/3}$$

(где $\text{const} \sim 1 \text{ см}^{4/3} \cdot \text{с}^{-2}$), так что

$$v \approx (\text{const})^{1/2} \cdot l^{-2/3} \ll f$$

для всех практически важных f ¹⁾. В силу этого при распространении звука через турбулентный поток имеет значение лишь мгновенный снимок с турбулентности, а не ее течение во времени. По этой же причине нельзя думать, что затухание звука в турбулентном потоке обусловлено существованием турбулентной вязкости. Тензор турбулентных напряжений, с которым связано понятие турбулентной вязкости, получается как результат усреднения турбулентных пульсаций при заданном среднем потоке. Это усреднение предполагает, что все изменения в среднем потоке происходят медленнее случайных пульсаций скорости, вызванных турбулентностью. Для звуковой волны положение дел, как мы видим, как раз обратное ($v \ll f$). Воздействие турбулентного потока на звуковую волну должно сводиться к рассеянию звука, подобному рассеянию света, проходящего через мутную среду: в обоих случаях имеют место случайные изменения скорости распространения волн.

Обратимся теперь к оценке величины этого рассеяния. Мы будем исходить из уравнения А. М. Обухова, приближенно учитывающего наличие вихрей. Обозначая квазипотенциал звуковой волны через ϕ и полную скорость потока через $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, мы получим из (1.84) (при $\nabla P_0 = 0$, $\nabla \ln c^2 = 0$, $v/c \ll 1$):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi + \frac{2}{c^2} \left(\mathbf{V}, \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \int^t (\nabla \phi, \Delta \mathbf{V}) dt = 0. \quad (2.90)$$

Переходя к местной системе координат, в которой $\mathbf{v} = 0$, найдем:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = - \frac{2}{c^2} \left(\mathbf{u}, \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \int^t (\nabla \phi, \Delta \mathbf{u}) dt. \quad (2.91)$$

¹⁾ Следует заметить, что существует минимальный масштаб турбулентности

$$l = l_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt[4]{\frac{\mu^3}{D_0 \rho^3}}$$

(D_0 — приток энергии, μ — вязкость среды, ρ — ее плотность; κ — число ≈ 1 . См. А. М. Обухов [19]). В силу этого неравенство $v \ll f$ может нарушиться лишь для f порядка нескольких герц.

Правую часть этого уравнения будем рассматривать как возмущение. Отбрасывая ее совсем, мы найдем нулевое приближение ψ_0 , представляющее первичную волну:

$$\psi_0 = A \exp \{i[\omega t - k(\mathbf{n}_1, \mathbf{x})]\}, \quad (2.92)$$

где \mathbf{n}_1 — единичный вектор в направлении распространения первичной волны, $k = \omega/c$. Полное решение будет

$$\psi = \psi_0 + \varphi, \quad (2.93)$$

где φ — рассеянная волна. Для больших расстояний R от рассматриваемого нами параллелепипеда φ имеет вид

$$\varphi = \frac{B}{R} \exp [i(\omega t - kR)]. \quad (2.94)$$

Для определения амплитуды рассеянной волны B воспользуемся методом теории возмущений и подставим ψ_0 в правую часть (2.91) вместо ψ . Тогда получится:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = - \frac{2}{c^2} \left(\mathbf{u}, \nabla \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \right) + \int_0^t (\nabla \psi_0, \Delta \mathbf{u}) dt = Q. \quad (2.95)$$

Решение волнового уравнения (2.95), имеющее вид (2.94), как известно, равно

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{4\pi} \int_{L^3} \frac{Q(\mathbf{x}', t - r/c)}{r} dv', \quad (2.96)$$

$dv' = dx' \cdot dy' \cdot dz'$, r — расстояние между точками \mathbf{x} (точка наблюдения) и \mathbf{x}' (источник рассеянной волны). Пусть \mathbf{n} есть единичный вектор в направлении рассеянного луча (рис. 12), R — расстояние от центра параллелепипеда, θ — угол рассеяния (угол между \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}). Тогда, как следует из рисунка, $r = R - (\mathbf{x}', \mathbf{n})$ (пренебрегая членами порядка x'/R). Подставляя в (2.96) Q из (2.95) и пользуясь (2.92), мы найдем для $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi = & - \frac{1}{4\pi} \frac{\exp [i(\omega t - kR)]}{R} \frac{A}{c} \int_{L^3} (2\mathbf{u}' k^2 + \Delta \mathbf{u}', \mathbf{n}_1) \times \\ & \times \exp [i(\mathbf{K}, \mathbf{x}')] dv', \end{aligned} \quad (2.97)$$

где вектор \mathbf{K} равен:

$$\mathbf{K} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}_1), \quad K = 2k \sin(\theta/2), \quad (2.98)$$

а u' есть значение скорости u в точке \mathbf{x}' . Таким образом, амплитуда рассеянной волны B равна:

$$B = \frac{A}{4\pi c} \int_{L^3} (2uk^2 + \Delta u, \mathbf{n}_1) \exp[i(\mathbf{K}, \mathbf{x}')] dv'. \quad (2.99)$$

Выразим теперь коэффициент затухания α через амплитуду рассеянной волны. Поток звуковой энергии N ,

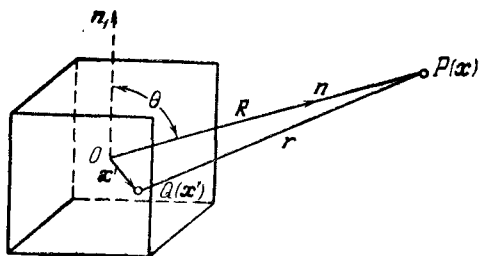


Рис. 12.

втекающий в основание параллелепипеда L^2 , пропорционален $A^2 L^2$, а поток рассеиваемой из параллелепипеда энергии получится путем интегрирования по удаленной сфере радиуса R ; он пропорционален $\int |B|^2 d\Omega$, где интегрирование производится по всем направлениям рассеяния. Так как нас интересует не мгновенное значение рассеяния, а среднее, то вместо предыдущего выражения следует взять $\int \overline{|B|^2} d\Omega$, где черта над $|B|^2$ означает усреднение по пульсациям скорости турбулентного потока. Средняя убыль потока энергии при прохождении параллелепипеда L^3 будет:

$$\Delta N = \alpha N L, \quad (2.100)$$

откуда $\alpha = \frac{\Delta N}{NL}$, и так как $\Delta N = \beta \int |B|^2 d\Omega$ (β — множитель пропорциональности) и $N = \beta A^2 L^2$, то

$$\alpha = \frac{\int |B|^2 d\Omega}{A^2 L^3}. \quad (2.101)$$

Из (2.99) следует, что

$$\begin{aligned} |B|^2 = & \frac{A^2}{16\pi^2 c^2} \int_{L^3} dv' \int_{L^3} dv'' \exp[i(\mathbf{K}, \boldsymbol{\rho})] \times \\ & \times \overline{\{(2u_1' k^2 + \Delta u_1') (2u_1'' k^2 + \Delta u_1'')\}}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'$ есть радиус-вектор между точками \mathbf{x}'' и \mathbf{x}' , u_1 — проекция \mathbf{u} на \mathbf{n}_1 . Введя вместо \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' относительные координаты $\boldsymbol{\rho}$ и координаты центра тяжести $\mathbf{x} = (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')/2$, получим:

$$\begin{aligned} |B|^2 = & \frac{A^2 L^3}{16\pi^2 c^2} \int dv_{\boldsymbol{\rho}} \exp[i(\mathbf{K}, \boldsymbol{\rho})] \times \\ & \times \{4k^4 M_{11}(\boldsymbol{\rho}) + 4k^2 \Delta M_{11}(\boldsymbol{\rho}) + \Delta^2 M_{11}(\boldsymbol{\rho})\}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

где

$$M_{11}(\boldsymbol{\rho}) = \overline{u_1' u_1''} = \overline{u_1(\mathbf{x}') u_1(\mathbf{x}'')}$$

есть момент связи. Этот момент тождествен с введенным в § 10 [см. (2.54)] моментом $M_{ik}^p(\boldsymbol{\rho})$ при $i = k = 1$ и $p = q_0$. Пользуясь теперь (2.56) и (2.65), мы находим, что

$$M_{11}(\boldsymbol{\rho}) = \int_{q > q_0} \exp[-i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})] \left(1 - \frac{q_1^2}{q^2}\right) \gamma q^{-11/3} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (2.104)$$

Применяя к $M_{11}(\boldsymbol{\rho})$ операторы Δ и Δ^2 , мы получим просто умножение подынтегрального выражения в (2.104) на $-q^2$ и на q^4 соответственно. Подстановка момента (2.104) в (2.103) приведет к интегралам вида

$$\begin{aligned} & \int_{q > q_0} dv_{\boldsymbol{\rho}} \int dq_1 dq_2 dq_3 \exp\{i(\mathbf{K} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})\} F(\mathbf{q}) = \\ & = (2\pi)^3 \int_{q > q_0} dq_1 dq_2 dq_3 \delta(K_1 - q_1) \delta(K_2 - q_2) \delta(K_3 - q_3) \cdot F(\mathbf{q}) = \\ & = \begin{cases} (2\pi)^3 F(\mathbf{K}) & \text{для } K > q_0, \\ 0 & \text{для } K < q_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Здесь $\delta(x)$ есть символ δ -функции (ср. § 6). Поэтому $|\overline{B}|^2$ оказывается равным

$$|\overline{B}|^2 = \frac{2\pi A^2 L^2 k^4}{c^2} \left(1 - \frac{K^2}{k^2} + \frac{K^4}{4k^4}\right) \left(1 - \frac{K_1^2}{K^2}\right) \gamma K^{-1/3} \quad (2.106)$$

(для $K = q_0$, иначе $|\overline{B}|^2 = 0$). Отсюда на основании (2.101) получаем:

$$\alpha = \frac{2\pi k^4}{c^2} \int \left(1 - \frac{K^2}{k^2} + \frac{K^4}{4k^4}\right) \left(1 - \frac{K_1^2}{K^2}\right) \gamma K^{-1/3} d\Omega, \quad (2.107)$$

причем интегрирование по углам распространено на значения $K > q_0$. Полагая

$$\sin(\theta/2) = \xi, \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\xi \, d\xi \, d\varphi,$$

мы найдем, что интегрирование по $\xi = K/2k$ распространяется от $\xi = 1/2\mu$ до $\xi = 1$. Выполняя это элементарное интегрирование, получим:

$$\alpha = \mu^{5/3} \beta \left(\frac{2\pi \gamma^{1/2} \lambda^{1/3}}{c} \right)^2 \frac{1}{\lambda}, \quad (2.108)$$

где

$$\beta = \frac{3}{5} (2\pi)^{1/3} \{1 + 25 (2\mu)^{-1/3} - 21 (2\mu)^{-4/3} + 0 (\mu^{-4})\}. \quad (2.109)$$

Величина $2\pi \gamma^{1/2} \lambda^{1/3}$ есть скорость турбулентных пульсаций, масштаб которых меньше λ . Таким образом, коэффициент затухания звуковых волн в турбулентном потоке пропорционален квадрату числа Маха ($M_a = u(\lambda)/c$) для скорости турбулентных пульсаций масштаба, меньшего λ , и обратно пропорционален длине волны звука λ . Величина $2\pi \gamma^{1/2}$, если исходить из приведенной в § 10 оценки А. М. Обухова, равна 3. Данные В. А. Красильникова (§ 11), а также А. М. Обухова и Н. Д. Ершова (§ 11) дают, при умеренном ветре, $2\pi \gamma^{1/2} \approx 6$. Как мы уже указывали, турбулентность ветра нельзя считать изотропной, так что вообще $2\pi \gamma^{1/2}$ есть возрастающая функция скорости ветра. Если опираться на пока еще не очень достоверные опытные данные, приведенные в § 10, то следует считать γ пропорциональной скорости ветра. Этим и объясняется рост коэффициента затухания α со скоростью ветра.

Зависимость от длины волны звука коэффициента α получается у нас в виде $\lambda^{-1/3}$, т. е. весьма слабая, что на основании сказанного выше не противоречит опытным данным Х. Зига.

Для того, чтобы оценить значение численного фактора μ , воспользуемся данными того же Х. Зига при слабом ветре. В этом случае $2\pi\gamma^{1/2} \approx 6$. Коэффициент α равен 1,5 дБ на 100 м, что в абсолютных единицах дает $\alpha = 10^{-5} \text{ см}^{-1}$. При $f = 500 \text{ Гц}$ ($\lambda = 68 \text{ см}$) получим $\mu \approx 10$. Это значение μ следует считать вполне разумным.

§ 13. Распространение звука в среде сложного состава, в частности в соленой морской воде

В изложенной выше теории распространения звука предполагалось, что по своему составу среда однородна. Между тем, на практике приходится иметь дело и с такими случаями, когда состав среды меняется от точки к точке. Например, воздух, влажность которого различна в различных местах, или морская вода с переменной соленостью.

Все теоремы геометрической акустики, выведенные в §§ 7, 8, 9, сохраняют свою силу и для сред переменного состава¹⁾, однако исходные, общие уравнения акустики неоднородной и движущейся среды должны быть модифицированы.

Необходимость модификации этих уравнений диктуется тем, что в среде сложного состава давление p зависит не только от плотности среды ρ и энтропии S , но и от концентраций C_k отдельных компонент, образующих среду (например, от концентрации водяных паров в воздухе, от концентрации соли, растворенной в воде, и т. п.). Поэтому уравнение состояния следует писать не в виде $p = Z(\rho, S)$, как мы это делали раньше, а в виде

$$p = Z(\rho, S, C). \quad (2.110)$$

Здесь ρ — плотность среды, C — концентрация растворенной в ней компоненты: $C = \rho''/\rho'$, где ρ'' — плотность растворенной компоненты, а ρ' — плотность растворителя,

$$\rho = \rho' + \rho'' = \rho'(1 + C).$$

¹⁾ Конечно, если не нарушается основная предпосылка геометрической акустики о плавности всех изменений в состоянии среды.

Далее, к гидродинамическим уравнениям необходимо присоединить уравнения, управляющие изменениями концентрации растворенной компоненты. Эти изменения обуславливаются конвекцией, диффузией и действием силы тяжести. Чтобы написать соответствующее уравнение, заметим, что поток вещества растворенной компоненты \mathbf{J}'' будет:

$$\mathbf{J}'' = v\rho'C + \mathbf{i}, \quad (2.111)$$

$$\mathbf{i} = -\rho'D_1\nabla C - \rho'D_2 \frac{\nabla T}{T} + \rho'ugC, \quad (2.111')$$

где D_1 — коэффициент диффузии, D_2 — коэффициент термодиффузии, u — подвижность растворителя в поле тяжести, g — ускорение силы тяжести. Первый член в (2.111), $v\rho'C$, представляет собою часть потока, обусловленную конвекцией вещества, а второй, \mathbf{i} , — часть потока, обусловленную необратимыми процессами (диффузией, термодиффузией и движением в поле тяжести с трением). На основании закона сохранения вещества имеем:

$$\frac{\partial(\rho'C)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}'' = 0. \quad (2.112)$$

Плотность чистой среды ρ' подчиняется, конечно, уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho'\mathbf{v}) = 0. \quad (2.113)$$

Из (2.112) и (2.113) получаем искомое уравнение для C :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla C) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{i}. \quad (2.114)$$

Что же касается полной плотности $\rho = \rho'(1+C)$, то из (2.112) и (2.113) для нее получается:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{i}. \quad (2.115)$$

Основное динамическое уравнение гидродинамики,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{v}] + \nabla \frac{v^2}{2} = \\ = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\nu}{3} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

останётся без изменения. Уравнение для энтропии мы напишем сокращенно в форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla S) = \psi, \quad (2.117)$$

где через ψ обозначены изменения энтропии, обусловленные необратимыми процессами, имеющими место при движении жидкости (ψ содержит члены, пропорциональные ν , λ , D_1 , D_2 , u), а также возможным притоком тепла извне.

Уравнения (2.110), (2.114)—(2.117) и образуют полную систему уравнений для среды, в которой растворена какая-нибудь компонента (пары воды в воздухе, соль в воде и т. п.).

При распространении звука все величины, характеризующие среду, получают малые приращения, так что \mathbf{v} заменится на $\mathbf{v} + \xi$, p на $p + \pi$, ρ на $\rho + \delta$, S на $S + \sigma$ и C на $C + \Sigma$. Здесь Σ означает малое изменение концентрации растворенной компоненты, имеющее место в среде при прохождении звуковой волны. Подставляя эти измененные значения в (2.110), (2.114)—(2.117), ограничиваясь линейным приближением и отбрасывая дополнительные члены, пропорциональные ν , λ , D_1 , D_2 , u , т. е. оставляя в стороне необратимые процессы, сопровождающие звуковую волну, получим¹⁾:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + [\text{rot } \mathbf{v}, \xi] + [\text{rot } \xi, \mathbf{v}] + \nabla(\mathbf{v}, \xi) = -\frac{\nabla \pi}{\rho} + \frac{\nabla p \delta}{\rho^2}, \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \delta) + (\xi, \nabla \rho) + \rho \text{div } \xi + \delta \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \sigma) + (\xi, \nabla S) = 0, \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \Sigma) + (\xi, \nabla C) = 0, \quad (2.121)$$

$$\pi = c^2 \delta + h \sigma + g \Sigma, \quad (2.122)$$

где

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S, C}, \quad h = \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{\rho, C}, \quad g = \left(\frac{\partial p}{\partial C} \right)_{\rho, S}; \quad (2.123)$$

¹⁾ Диффузия соли может давать дополнительное поглощение звука к тому, которое обусловлено вязкостью и теплопроводностью.

c^2 есть квадрат адиабатической скорости звука при постоянной концентрации раствора.

Эти уравнения и следует рассматривать как основные уравнения для распространения звука в неоднородной и движущейся среде переменного состава. Если под C разуметь концентрацию паров воды в воздухе, то это будут уравнения для распространения звука во влажной атмосфере.

Эти же уравнения могут рассматриваться как уравнения для звуковой волны, распространяющейся в соленой морской воде. Для этого C следует считать концентрацией соли, растворенной в воде. При наличии градиентов энтропии ($\nabla S \neq 0$), так же как и при наличии градиентов концентрации растворенной компоненты ($\nabla C \neq 0$), правая часть (2.118) не является градиентом какой-либо функции. Поэтому даже в отсутствие завихренности (т. е. при $\text{rot } \mathbf{v} = 0$) звук будет завихренным ($\text{rot } \xi \neq 0$). В силу этого система уравнений (2.118) — (2.122) не может быть сведена к уравнению для одной функции (например, к уравнению для потенциала звука, к уравнению для звукового давления и т. п.).

Чтобы перейти к уравнениям геометрической акустики, заметим, что уравнение (2.121) не отличается формально от уравнения (2.120). Поэтому, следуя по тому же пути, который был избран нами в § 7 для вывода уравнений геометрической акустики среды постоянного состава, и полагая, в дополнение к формулам (2.5) и (2.7),

$$\Sigma = \Sigma_0 e^{i\Phi}, \quad \Sigma_0 = \Sigma'_0 + \frac{\Sigma''_0}{ik_0} + \dots, \quad (2.124)$$

получим:

$$\sigma'_0 = 0, \quad \Sigma'_0 = 0, \quad (2.125)$$

т. е. в первом приближении геометрической акустики звук распространяется не только изоэнтропически, но и оставляет неизменным состав среды ($\Sigma'_0 = 0$). Все остальные выводы касательно геометрической акустики, сделанные нами ранее, также останутся в полной силе. Влияние неоднородности состава среды в этом приближении сведется к влиянию на скорость звука в среде c и на плотность среды ρ .

Звук будет распространяться внутри лучевых трубок со скоростью

$$V_s = cn + v, \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s, v}}, \quad (2.126)$$

а давление π будет подчиняться закону

$$V_s \frac{\pi^2 s}{\rho g c^2} = \text{const} \quad (2.127)$$

(ср. § 7, формула (2.32)).

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда среда покоится. Этот случай имеет особый интерес для воды, в которой скорость звука велика, а скорость течения мала.

Для спокойной среды ($v=0$) из (2.118)–(2.122) получаем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\nabla \pi}{\rho} + \frac{\nabla p}{\rho^2} \left(\frac{\pi - h\sigma - g\Sigma}{c^2} \right), \quad (2.118')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\pi - h\sigma - g\Sigma}{c^2} \right) + \rho \operatorname{div} \xi = 0, \quad (2.119')$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -(\xi, \nabla S), \quad (2.120')$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -(\xi, \nabla C). \quad (2.121')$$

Полагая $\pi/\rho = \Pi$ и пользуясь (2.120') и (2.121), найдем уравнение для Π и ξ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho c^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho^2 c^2} (\nabla p', \xi), \quad (2.128)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \operatorname{div} \xi + \frac{(\nabla p', \xi)}{\rho c^2} = 0, \quad (2.129)$$

где

$$\nabla p' = h \nabla S + g \nabla C = \nabla p - c^2 \nabla \rho. \quad (2.130)$$

Подставляя $\partial \Pi / \partial t$ из (2.129) в (2.128), получим уравнение для скорости звуковых колебаний:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \nabla \left(c^2 \operatorname{div} \xi + \frac{(\nabla p', \xi)}{\rho} \right) - \frac{\nabla p' \operatorname{div} \xi}{\rho} + \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \frac{(\nabla p', \xi)}{\rho}. \quad (2.131)$$

Это и есть уравнение для распространения звуковых колебаний в спокойной среде, в которой меняются плот-

ность, температура (энтропия) и концентрация растворенного вещества. Из уравнения видно, что для вычисления ξ нам достаточно знать c , p и ρ как функции места, причем c есть адиабатическая скорость звука, а ρ — полная плотность среды.

Как видим, уравнение (2.131) не сводится к уравнению для потенциала или для давления.

После того как ξ найдена из (2.131), мы найдем звуковое давление из (2.129):

$$\frac{p}{\rho} = \Pi = \int \left\{ c^2 \operatorname{div} \xi + \frac{(\nabla p', \xi)}{\rho} \right\} dt. \quad (2.132)$$

В некоторых особых случаях уравнение (2.131) может быть приближенно заменено более простым волновым уравнением. В самом деле, допустим, что мы имеем дело с такой средой, для которой член в уравнении (2.131), содержащий ∇c^2 , гораздо больше членов, содержащих $\nabla p'$. Тогда, отбрасывая члены с $\nabla p'$ и полагая $\xi = -\nabla \varphi$ (φ — потенциал скорости звуковых колебаний), получим обычное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi, \quad (2.133)$$

в котором, однако, c меняется от точки к точке.

Заметим, что член с ∇c^2 есть $\nabla (c^2 \operatorname{div} \xi)$ и по порядку величины равен $(\nabla c^2, k\xi)$ (k — волновое число). Наибольший член, содержащий $\nabla p'$, есть $(\nabla p', \operatorname{div} \xi)/\rho$, по порядку величины равный $(\nabla p', k\xi)/\rho$. Следовательно, члены, содержащие $\nabla p'$, могут быть отброшены, а член, содержащий ∇c^2 , удержан, если

$$\nabla c^2 \gg \nabla p'/\rho. \quad (2.134)$$

Чтобы найти условия выполнения этого неравенства, будем рассматривать c^2 и p' как функции p , T и C . Имеем:

$$\nabla c^2 = \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_{T, C} \nabla p + \left(\frac{\partial c^2}{\partial T} \right)_{p, C} \nabla T + \left(\frac{\partial c^2}{\partial C} \right)_{p, T} \nabla C, \quad (2.135)$$

$$\frac{\nabla p'}{\rho} = \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{c^2}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, C} \nabla p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, C} \nabla T + \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p, T} \nabla C \right\}. \quad (2.136)$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_{T, c} = \frac{1}{a^2}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{p, c} = -\rho\beta, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial C}\right)_{T, p} = -\rho\kappa,$$

где $\kappa = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial C}\right)_{T, p}$; a^2 есть квадрат изотермической скорости звука, β — коэффициент объемного расширения, κ — относительное изменение объема жидкости (газа) при изменении концентрации соли (или пара соответственно). Так как

$$a^2 = \frac{c_p}{c_v} c^2 \quad \text{и} \quad c_p - c_v = a^2 \beta^2 T,$$

то из (2.136) получаем:

$$\frac{\nabla p'}{\rho} = -\frac{a^2 \beta^2 T}{\rho c_v} \nabla p + c^2 \beta \nabla T + c^2 \kappa \nabla C. \quad (2.137)$$

Эти формулы позволяют на основании экспериментальных данных решить вопрос о выполнении (или невыполнении) неравенства (2.134).

В частности, для морской соленой воды это неравенство выполняется, видимо, удовлетворительным образом. В самом деле, для воды $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ (при 18°C), при 4°C $\beta = 0$. Величина $\kappa = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial C}\right)_{p, T}$ для раствора NaCl или KCl при 15°C составляет около 0,15—0,20. По измерениям А. Вуда [30, 31] скорость звука в морской воде при $t = 16,95^\circ\text{C}$ и солености, равной 35,02‰ (т. е. при $C = 3,5 \cdot 10^{-2}$), равна $1526,3 \pm 0,3$ м/с и подчиняется формуле:

$$c = 1450 + 4,206t - 0,0366t^2 + 1,137 \cdot 10^3 (C - 3,5 \cdot 10^{-2}),$$

откуда

$$\left(\frac{\partial c^2}{\partial C}\right) = 2c \cdot 1,137 \cdot 10^3 = 1,42c^2.$$

Отсюда видно, что $\frac{\partial c^2}{\partial C} \gg \kappa c^2$. Далее, $\left(\frac{\partial c^2}{\partial T}\right)_{p, c} = 2c \cdot 4,2 = 5,8 \cdot 10^{-3} c^2$, а $\beta c^2 = 2 \cdot 10^{-4} c^2$, т. е. $\left(\frac{\partial c^2}{\partial T}\right)_{p, c} \gg \beta c^2$.

Таким образом, величина ∇c^2 для морской соленой воды значительно превосходит величину $\nabla p' / \rho$. Поэтому мы можем считать, что волновое уравнение (2.133) будет вполне удовлетворительным образом описывать распространение звука в спокойной морской воде.

ДВИЖУЩИЙСЯ ИСТОЧНИК ЗВУКА

§ 14. Волновое уравнение в произвольно движущейся системе координат

В системе координат (x, y, z, t) , связанной с неподвижным воздухом, волновое уравнение для акустического потенциала φ гласит:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.1)$$

Представим теперь себе, что мы имеем дело с движущимся источником звука, положение которого определяется координатами:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t). \quad (3.2)$$

В этом случае целесообразно ввести систему координат (ξ, η, ζ, τ) , связанную с источником звука:

$$\xi = x - X(t), \quad \eta = y - Y(t), \quad \zeta = z - Z(t), \quad \tau = t. \quad (3.3)$$

В этой системе координат имеет место ветер, скорость которого V_0 имеет компоненты

$$V_{0x} = -\frac{dX}{dt} = -v_x, \quad V_{0y} = -\frac{dY}{dt} = -v_y, \quad V_{0z} = -\frac{dZ}{dt} = -v_z. \quad (3.4)$$

Преобразуем уравнение (3.1) к системе координат (ξ, η, ζ, τ) . Для этого заметим, что

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(\xi + X(\tau), \eta + Y(\tau), \zeta + Z(\tau); \tau), \quad (3.5)$$

так что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad \text{т. е. } \nabla_{xyz} \varphi = \nabla_{\xi\eta\zeta} \varphi = \nabla \varphi, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\mathbf{v}, \nabla) \varphi; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - 2(\mathbf{v}, \nabla) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + (\mathbf{v}, \nabla)(\mathbf{v}, \nabla) \varphi - \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\tau}, \nabla \right) \varphi.\end{aligned}\quad (3.6')$$

Поэтому волновое уравнение (3.1) в системе координат ξ, η, ζ будет:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{2}{c^2} (\mathbf{v}, \nabla) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \\ - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}, \nabla)(\mathbf{v}, \nabla) \varphi + \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\tau}, \nabla \right) \varphi = 0,\end{aligned}\quad (3.7)$$

или, если вместо скорости источника \mathbf{v} ввести скорость ветра \mathbf{V}_0 , то

$$\begin{aligned}\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{2}{c^2} (\mathbf{V}_0, \nabla) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V}_0, \nabla)(\mathbf{V}_0, \nabla) \varphi - \\ - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{V}_0}{d\tau}, \nabla \right) \varphi = 0.\end{aligned}\quad (3.7')$$

Это уравнение может рассматриваться как уравнение для распространения звука в среде, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_0(t)$, зависящей от времени, но не зависящей от координат. В самом деле, оно почти совпадает с ранее выведенным нами (гл. I, § 5) уравнением (1.85), управляющим распространением звука в среде, в которой дует ветер с постоянной скоростью \mathbf{V}_0 . Отличие заключается лишь в наличии последнего члена, содержащего ускорение $d\mathbf{V}_0/dt$. Однако, предположив, что скорость ветра \mathbf{V}_0 есть функция времени, мы получили бы в § 5 уравнение, в точности совпадающее с (3.7'). Конечно, предположение о наличии такого ветра является искусственным, но оно совместимо с уравнениями гидродинамики несжимаемой жидкости. Эти уравнения при наличии внешних объемных сил $\rho \mathbf{g}$ гласят:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3.8)$$

Полагая, что \mathbf{V} и p не зависят от координат, мы получим:

$$\frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \mathbf{g}. \quad (3.9)$$

Следовательно, такое движение осуществляется в фиктивном поле тяжести, имеющем ускорение $g = dV_0/dt$. Таким образом, мы можем, рассматривая звуковое поле движущегося источника, считать источник неподвижным, но тогда в среде следует вообразить себе, вообще говоря, переменный ветер, ускорение которого обусловлено «силой тяжести», создающей ускорение

$$g = -\frac{dv}{dt}. \quad (3.10)$$

§ 15. Источник звука, движущийся равномерно, с дозвуковой скоростью

Рассмотрим произвольный источник звука, движущийся с постоянной скоростью v , меньшей скорости звука c . Пусть скорость v направлена по оси Ox . Тогда, переходя к системе координат, связанной с нашим источником звука,

$$\xi = x - vt, \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad \tau = t, \quad (3.11)$$

мы получим частный случай уравнения (3.7),

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0, \quad (3.12)$$

и, вводя, как это было сделано в § 5, сжатую по оси Ox систему координат

$$\xi^* = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad \tau = t, \quad (3.13)$$

получаем вместо (3.12):

$$\begin{aligned} \Delta^* \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{2\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial \xi^*} &= 0, \\ \Delta^* &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \beta = v/c. \end{aligned} \quad (3.13')$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.94)¹⁾, и мы можем применить к нему обобщенную теорему Кирх-

¹⁾ Следует иметь в виду, что сейчас β есть v/c , а в § 6 β означает V_0/c ; таким образом, β в § 6 и сейчас различается знаком (так как $V_0 = -v$).

гофа (ср. § 6). Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением звука частоты ω (в системе, связанной с источником), так что

$$\varphi = \psi e^{i\omega t}. \quad (3.14)$$

Тогда на основании (1.108) получим:

$$\begin{aligned} \psi_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R^*} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R^*} \right) \right\} dS + \\ + \frac{2i\beta k}{4\pi \sqrt{1-\beta^2}} \int_S \psi \frac{e^{-ikR}}{R^*} dS, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где ψ_P есть значение потенциала в точке наблюдения P и поверхность S обнимает источник. Далее:

$$R^* = \sqrt{\xi^{*2} + \eta^2 + \zeta^2}, \quad R = \frac{-\beta \xi^* + R^*}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.16)$$

При этом R^* имеет смысл расстояния (в системе ξ^*, η, ζ) от точки наблюдения P до точки поверхности $S(Q)$:

$$\xi^* = \xi_Q^* - \xi_P^*, \quad \eta = \eta_Q - \eta_P, \quad \zeta = \zeta_Q - \zeta_P. \quad (3.17)$$

Рассмотрим теперь волновое поле вдали от поверхности S ($R^* \rightarrow \infty$). При больших удалениях точки P от поверхности, как видно из рис. 13,

$$R^* = R_P^* + R_Q^* \cos \theta_{PQ} + \dots, \quad (3.18)$$

где R^* есть расстояние QP , R_Q^* — расстояние OQ , θ_{PQ} — угол между OP и OQ . На основании (3.18) и (3.17) находим:

$$\begin{aligned} R = \frac{-\beta \xi^* + R^*}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta \xi_P^* + R_P^*}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{-\beta \xi_Q^* + R_Q^* \cos \theta_{PQ}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dots \\ \dots = R_P + \Delta + \dots, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$R_P = \frac{\beta \xi_P^* + R_P^*}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta = \frac{-\beta \xi_Q^* + R_Q^* \cos \theta_{PQ}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.20)$$

Подставляя значение R (3.19) в уравнение (3.15) и пренебрегая членами порядка $1/R^{*2}$, получим:

$$\psi = \frac{\exp(-ikR_P)}{4\pi R_P^*} \left\{ \int_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - ik\psi \frac{\partial \Delta}{\partial n} \right) e^{-ik\Delta} dS + \right. \\ \left. + \frac{2i\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \psi e^{-ik\Delta} dS \right\}. \quad (3.21)$$

Стоящее в фигурных скобках выражение зависит только от размеров и формы поверхности и углов, определяющих направление радиуса-вектора OP . Эти углы раз-

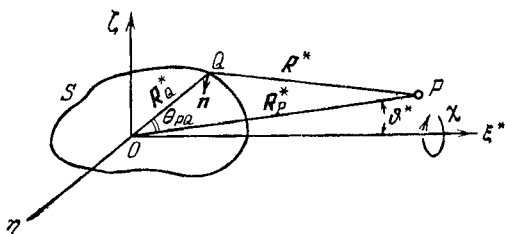


Рис. 13.

личны в зависимости от того, берем ли мы их в поджатой системе ξ^*, η, ζ или в исходной ξ, η, ζ (они отличаются на величины порядка β^2). Пусть в системе ξ, η, ζ они суть ϑ, χ (а в поджатой ϑ^*, χ соответственно).

Возвращаясь к системе ξ, η, ζ , мы можем написать:

$$\psi(\xi_P, \eta_P, \zeta_P) = \frac{\exp(-ikR_P)}{R_P^*} Q(\vartheta, \chi), \quad (3.22)$$

где ξ_P^* в R_P и R_P^* следует выразить через ξ_P . На основании (3.14) для φ получаем:

$$\varphi(\xi_P^*, \eta_P, \zeta_P; \tau) = \frac{\exp[i\omega(t - R_P/c)]}{R_P^*} Q(\vartheta, \chi), \quad (3.23)$$

где $Q(\vartheta, \chi)$ есть интеграл

$$4\pi Q(\vartheta, \chi) = \\ = \int_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - ik\psi \frac{\partial \Delta}{\partial n} \right) e^{-ik\Delta} dS + \frac{2i\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_S \psi e^{-ik\Delta} dS. \quad (3.24)$$

Величина $Q(\vartheta, \chi)$ определяет силу источника звука (она имеет размерность объемной скорости, $\text{см}^3/\text{с}$) и его направленность. Если разложить $Q(\vartheta, \chi)$ в ряд по шаровым функциям $P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\chi}$, $l=0, 1, 2, \dots$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, то

$$Q(\vartheta, \chi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Q_{lm} \cdot P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\chi}. \quad (3.25)$$

Когда все коэффициенты Q_{lm} , кроме $Q_0=Q$, равны нулю, то мы имеем дело с источником нулевого порядка:

$$\varphi(\xi_P, \eta_P, \zeta_P; t) = \frac{\exp[i\omega(t - R_P/c)]}{R_P^*} Q_0. \quad (3.26)$$

Если, например, отлично от нуля лишь Q_{10} , то, так как $P_1^0 = \cos \vartheta$, мы получим:

$$\varphi(\xi_P, \eta_P, \zeta_P; t) = \frac{\exp[i\omega(t - R_P/c)]}{R_P^*} Q_{10} \cdot \cos \vartheta, \quad (3.27)$$

т. е. дипольный источник, причем диполь ориентирован по оси $O\xi$. Члены с $l > 1$ дают мультиплетное излучение.

Обратимся теперь к рассмотрению зависимости φ от расстояния. Очевидно, что поверхностями постоянной амплитуды ψ , если отвлечься от направленности по углам, заключенной в $Q(\vartheta^*, \chi)$, будут поверхности

$$R_P^* = \text{const.} \quad (3.28)$$

Но $R_P^* = \sqrt{\frac{\xi_P^2}{1-\beta^2} + \eta^2 + \zeta^2}$, т. е. поверхностями постоянной амплитуды будут эллипсоиды (рис. 14)

$$\frac{\xi_P^2}{1-\beta^2} + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.} \quad (3.29)$$

Поверхности постоянной фазы запишутся в виде

$$\alpha = \omega(t - R_P/c) = \text{const.} \quad (3.30)$$

Отсюда мы видим, что фазовая скорость вдоль R_P^* равна скорости звука c .

Допустим теперь, что мы наблюдаем волновое поле φ с точки зрения неподвижного наблюдателя. Тогда

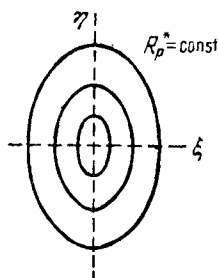


Рис. 14.

для этого наблюдателя, в силу движения источника, R_p , а вместе с тем и фаза волны α будут зависеть от времени t более сложным образом, нежели простая пропорциональность t . Поэтому такой наблюдатель не будет воспринимать это звуковое поле как поле гармонических колебаний (хотя в системе, связанной с источником, мы предположили гармонические колебания). Тем не менее, если изменения величины R_p не слишком быстры, мы можем определить частоту ω' для неподвижного наблюдателя как производную фазы α по времени:

$$\omega' = \frac{d\alpha}{dt} = \omega \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR_p}{dt} \right). \quad (3.31)$$

Вычислим производную dR_p/dt . На основании (3.20) и (3.18) имеем:

$$\frac{1}{c} \frac{dR_p}{dt} = \frac{\beta + \xi_p^*/R_p^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{c} \frac{d\xi_p^*}{dt} = -\beta \frac{\beta + \xi_p^*/R_p^*}{1 - \beta^2}, \quad (3.32)$$

откуда

$$\omega' = \omega \frac{1 + \beta (\xi_p^*/R_p^*)}{1 - \beta^2}. \quad (3.33)$$

Эта формула дает выражение для изменения частоты, происходящего в силу движения источника звука, т. е. эффект Доплера, обусловленный движением источника. Если наблюдатель расположен впереди источника, то из (3.33) находим:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \beta} \quad (\xi_p^* = R_p^*), \quad (3.33')$$

а если сзади, то

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \beta} \quad (\xi_p^* = -R_p^*). \quad (3.33'')$$

(3.33') и (3.33'') суть простейшие формулы для эффекта Доплера. Формула (3.33) дает числовое выражение эф-

фекта Доплера для любого положения наблюдателя. Если пренебречь величинами порядка β^2 , то из (3.33) получаем:

$$\omega' = \omega(1 + \beta \cos \vartheta), \quad (3.34)$$

где ϑ — угол между скоростью источника и направлением OP — направлением на наблюдателя.

§ 16. Источники звука, движущиеся произвольным образом, но с дозвуковой скоростью

Расчет, проведенный в предшествующем параграфе, показывает, что поле вдали от равномерно движущегося источника имеет вид поля, порождаемого точечным, сосредоточенным в точке O (см. рис. 13) источником, и природа источника скрывается целиком в функции $Q(\vartheta, \chi)$, определяющей силу и направленность источника. Опираясь на этот результат, мы можем избежать пользования теоремой Кирхгофа, которая хотя и может быть сформулирована также и для неравномерно движущейся поверхности, но получает в этом случае очень громоздкий и неудобный для применений вид. Предполагая, что источник движется по траектории

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t), \quad (3.35)$$

мы не будем входить в истинную природу нашего источника, а предположим, что колебание создается некоторой объемной силой, сосредоточенной в месте нахождения точечного источника. Наш результат не будет зависеть от такого предположения [32]. Допуская такой способ возникновения колебаний, мы выразим это тем, что в волновое уравнение введем правую часть, определяющую силу нашего источника:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi Q(x, y, z; t). \quad (3.36)$$

Чтобы выразить тот факт, что сила Q приложена лишь в месте нахождения источника, мы воспользуемся введенными в § 6 δ -функциями и положим

$$Q(x, y, z, t) = F(t) \delta(x - X(t)) \delta(y - Y(t)) \delta(z - Z(t)). \quad (3.37)$$

Величина $F(t)$ дает зависимость силы от времени в системе, связанной с источником. Благодаря введению δ -функций, которые всюду равны нулю, кроме точки, где их аргумент обращается в нуль, сила Q будет отлична от нуля лишь в том месте, где находится рассматриваемому моменту времени источник. Решение уравнения (3.36), очевидно, эквивалентно решению уравнения (3.7) с неподвижной правой частью:

$$Q(\xi, \eta, \zeta; \tau) = F(\tau) \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta), \quad (3.37')$$

т. е. нахождению сингулярного решения уравнения (3.7'). Решение волнового уравнения (3.36) с правой частью, как известно, гласит (ср. § 6):

$$\varphi(x, y, z; t) = \int \frac{Q(x', y', z', t - r/c)}{r} dV', \quad (3.38)$$

где $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ есть расстояние от источника звука (точка x', y', z') до точки наблюдения (x, y, z) . Очевидный физический смысл этого решения заключается в том, что возмущение, образовавшееся в точке (x', y', z') , не сразу достигает точки (x, y, z) , а запаздывает на время r/c , в силу чего возмущение в точке (x, y, z) в момент времени t определяется тем возмущением в точке (x', y', z') , которое там было в момент $t - r/c$. Подставляя теперь значение (3.37) в (3.38), находим:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = \\ = \iiint \frac{[F]}{r} \delta(x' - [X]) \delta(y' - [Y]) \delta(z' - [Z]) dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (3.39)$$

где скобки $[]$ означают, что заключенная в них величина взята в момент времени $t - r/c$. Чтобы выполнить здесь интегрирование, введем вместо x', y', z' новые переменные, являющиеся аргументами δ -функций:

$$A = x' - [X], \quad B = y' - [Y], \quad C = z' - [Z], \quad (3.40)$$

и преобразуем $dx' dy' dz'$ по известным формулам интегрального исчисления:

$$dx' dy' dz' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial A} & \frac{\partial y'}{\partial A} & \frac{\partial z'}{\partial A} \\ \frac{\partial x'}{\partial B} & \frac{\partial y'}{\partial B} & \frac{\partial z'}{\partial B} \\ \frac{\partial x'}{\partial C} & \frac{\partial y'}{\partial C} & \frac{\partial z'}{\partial C} \end{vmatrix} dA dB dC = I dA dB dC. \quad (3.41)$$

Детерминант I легко вычисляется на основании формул (3.40), причем получается

$$I = \left| \frac{1}{1 - \frac{\partial [X]}{\partial r} \frac{(x' - x)}{r} - \frac{\partial [Y]}{\partial r} \frac{(y' - y)}{r} - \frac{\partial [Z]}{\partial r} \frac{(z' - z)}{r}} \right| = \frac{1}{\left| 1 - \frac{[v_R]}{c} \right|}, \quad (3.42)$$

где $[v_R]$ есть проекция скорости источника v на направление r , взятая в момент времени $t - r/c$. Подставляя теперь значение I в (3.39), производим интегрирование по A, B, C . На основании свойств δ -функций результат интегрирования должен просто равняться значению под-интегральной функции в точке $A=B=C=0$ (ср. § 6), т. е.

$$\varphi(x, y, t) = \sum \left(\frac{[F]}{r} I \right)_{A=B=C=0}, \quad (3.43)$$

где сумма взята по точкам, где $A=B=C=0$. Эти точки легко определить. Из условий $A=B=C=0$ имеем:

$$(x' - x) = [X] - x, \quad (y' - y) = [Y] - y,$$

$$(z' - z) = [Z] - z. \quad (3.44)$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая почленно, получим уравнение для нахождения значения r в точке $A=B=C=0$. Это значение обозначим через R . Из (3.44) указанным путем находим:

$$R^2 = \{x - X(t - R/c)\}^2 + \{y - Y(t - R/c)\}^2 + \{z - Z(t - R/c)\}^2, \quad (3.45)$$

или

$$f(R) = 0, \quad (3.46)$$

где

$$f(R) = \{x - X(t - R/c)\}^2 + \{y - Y(t - R/c)\}^2 + \{z - Z(t - R/c)\}^2 - R^2, \quad (3.47)$$

при этом, так как $R > 0$, то следует брать лишь положительные корни уравнения (3.46). На основании эквивалентности (3.44) и (3.46) сумма по

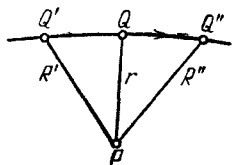


Рис. 15.

точкам $A=B=C=0$ в (3.43) переходит в сумму по положительным корням уравнения (3.46). Расстояние $r=R$ мы будем называть эффективным расстоянием. Его физическое значение иллюстрируется рисунком 15, где изображены траектории источника Q и точка наблюдения P .

Если в момент времени t источник находится в точке Q , то возмущение в точку P приходит из положения Q' , которое он занимал в момент $t-R/c$. Здесь R есть расстояние $Q'P$, мгновенное же расстояние

$$r = \sqrt{(x - X(t))^2 + (y - Y(t))^2 + (z - Z(t))^2}$$

равно QP . Подставляя в (3.43) значение $r=R$, находим:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum \frac{F(t - R/c)}{R^* \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.48)$$

где, как легко проверить по (3.42) и (3.47),

$$\sqrt{1 - \beta^2} \cdot R^* = R \left| 1 - \frac{[v_R]}{c} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{df}{dR} \right|. \quad (3.49)$$

Если скорость источника меньше звуковой, то положительный корень уравнения (3.46) будет лишь один. В самом деле, чтобы уравнение $f(R)=0$ имело второй положительный корень, $f(R)$ должно проходить через экстремум, т. е. df/dR должно обратиться в нуль. Из (3.49)

видно, что в этом случае $[v_R]$ должно сравняться с c , что невозможно. Поэтому при $v < c$ имеем:

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{F(t - R/c)}{R^* \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.50)$$

где R есть единственный положительный корень уравнения (3.46)¹⁾. Случай $v > c$ мы рассмотрим особо (§ 20). Из (3.50) видно, что волновое поле для всех движений точечного источника выражается одинаково через R^* и R , но сами функции $R^*(x, y, z; t)$ и $R(x, y, z; t)$, так, как они получаются из (3.46), конечно, различны. В частности, для равномерного движения по оси Ox со скоростью v

$$f(R) = \left\{ x - v \left(t - \frac{R}{c} \right) \right\}^2 + y^2 + z^2 - R_1^2. \quad (3.51)$$

Из (3.46) находим уже знакомый результат:

$$R = \frac{\beta \xi^* + R^*}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad R^* = \sqrt{\xi^{*2} + y^2 + z^2}, \quad \xi^* = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.52)$$

Найденное нами решение (3.50) представляет поле нулевого источника. Однако, комбинируя такие источники с надлежащими фазами и располагая их друг относительно друга известным образом, мы можем представить вол-

¹⁾ В § 5 решение имеет вид $\frac{F(t + R/c)}{R^*}$. Различие между ним и (3.50) только кажущееся. Во-первых, множитель $\sqrt{1 - \beta^2}$ не входил только по той причине, что в § 5 мы не интересовались абсолютной силой источника. Далее, уравнение (3.36) имеет также формальное опережающее решение. Именно, в (3.38) можно брать $Q(x', y', z', t + r/c)$. Выбрав знак (+), мы получим вместо (3.50):

$$\varphi = \frac{F(t + R'/c)}{R^* \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad R^* \sqrt{1 - \beta^2} = \left| 1 + \frac{[v_R]'}{c} \right|,$$

где $[v_R]'$ есть значение v_R в момент $t + R/c$. В уравнении (3.46) знак при R также поменялся бы. Значение R было бы R'' (см. рис. 15). Отсюда видно, что если уравнение (3.46) имеет решение $R_1 = R$, то оно имеет и решение $R_2 = -R''$. Поэтому, чтобы получить запаздывающие решения (3.46), следует взять $R > 0$, если мы исходим из $Q(x', y', z', t - r/c)$, а если исходим из $Q(x', y', z', t + r/c)$, то следует взять $R < 0$. Но корень как раз равен $-R_1$.

новое поле, имеющее любую характеристику направленности. Например, два нулевых источника одинаковой силы, но противоположные по фазе, будучи помещены на малом расстоянии друг от друга ($l \ll R$), дадут диполь.

Если источник начал функционировать в некоторый момент времени, скажем, $t=0$ (мы, стало быть, считаем, что $F(t)=0$ для $t < 0$), то можно говорить о фронте волны, т. е. той поверхности, которой достигло исходящее от источника возмущение.

Из каждого положения источника волна уходит за время t на расстояние $R=ct$. Подставляя это значение R в (3.46), находим уравнение фронта волны:

$$\{x - X(0)\}^2 + \{y - Y(0)\}^2 + \{z - Z(0)\}^2 = c^2 t^2, \quad (3.53)$$

т. е. шар радиуса ct с центром в точке, где начал функционировать источник [т. е. в $x=X(0)$, $y=Y(0)$, $z=Z(0)$]. Таким образом, при $v < c$ движущийся источник все время находится внутри сферы, образованной фронтом волны (рис. 16).

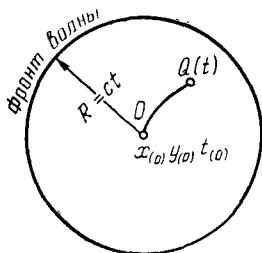


Рис. 16.

Заметим, что полученные здесь результаты для звукового поля движущегося источника во многих отношениях сходны с известными результатами Ленарда — Вихерта для электромагнитного поля движущегося точечного заряда (электрона).

§ 17. Общая формула для эффекта Доплера

Полагая, что источник звука гармонический, имеющий в своей системе частоту ω , специализируем вид φ (3.47):

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{Q \exp[i\omega(t - R/c)]}{R^* \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{Q e^{i\alpha}}{R^* \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.54)$$

Под мгновенной частотой ω' , воспринимаемой некоторым наблюдателем, не движущимся совместно с источником, мы будем разуметь производную фазы α по времени:

$$\omega' = \frac{d\alpha}{dt} = \omega \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt} \right). \quad (3.55)$$

Эту формулу и следует рассматривать как наиболее общую формулу для выражения эффекта Доплера. Мы приводили ее уже ранее для равномерного движения, она остается верной и для общего случая движения. Однако в § 15 мы оставили без внимания вопрос о границах пригодности этой формулы. Дело в том, что для наблюдателя, не связанного с источником, спектр волнового поля $\varphi(x, y, z, t)$, несмотря на гармоничность источника, будет выглядеть как непрерывный и интенсивности отдельных частот будут определяться амплитудами $\Psi(x, y, z, \omega)$ в разложении

$$\varphi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, y, z, \omega') e^{i\omega' t} d\omega'. \quad (3.56)$$

Спрашивается, в каких случаях действие всего этого спектра частот равносильно действию одной, зависящей от времени, частоты ω' по (3.55)? Ответ на этот вопрос прост и связан с анализом работы того приемника звука, которым пользуется наблюдатель. Пусть это будет некоторый резонатор с постоянной времени, равной T . В таком резонаторе колебания будут устанавливаться за время T . Если написать временную зависимость силы, действующей на наш приемник, в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{Q}{R^*} e^{i\omega' t} = A e^{i\omega' t}, \quad (3.57)$$

где ω' — «мгновенная» частота (3.55), $A = Q/R^*(t)$ — «мгновенная» амплитуда, то мы можем пренебречь зависимостью A и ω' от времени при условиях, если:

1) A меняется медленно по сравнению с изменениями фазы $\omega' t$, т. е.

$$\frac{1}{A} \left| \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega', \quad (3.58)$$

2) частота ω' мало меняется за время T , пока устанавливаются колебания:

$$\frac{d\omega'}{dt} T \ll \omega'. \quad (3.59)$$

Отсюда мы видим, что эффект Доплера можно наблюдать лишь для приемников с достаточно большим затуха-

нием (малое T). Эти условия мы проанализируем ниже подробнее, а теперь, предполагая их выполненными, рассмотрим эффект Доплера для случая движущихся

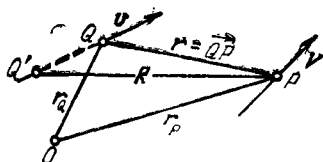


Рис. 17.

равномерно и прямолинейно, но под углом друг к другу наблюдателя и источника звука. На рис. 17 изображен источник Q , движущийся со скоростью v , и наблюдатель P , движущийся со скоростью V . Относительная скорость наблюдателя по отношению к источнику будет $u = V - v$.

Для вычисления R обратимся к формуле (3.16). Подставляя в R значение ξ^* и переходя от движения по оси Ox к движению по любому направлению (что делается простым поворотом системы координат), мы получим:

$$R = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v}/c) + \sqrt{r^2(1 - v^2/c^2) + (\mathbf{r}, \mathbf{v}/c)^2}}{(1 - v^2/c^2)}, \quad (3.60)$$

где \mathbf{r} — мгновенное расстояние $QP = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q$. Теперь вычислим dR/dt , принимая во внимание, что движутся и источник, и наблюдатель, так что

$$\mathbf{r}_P = Vt + \mathbf{r}_P^0, \quad \mathbf{r}_Q = vt + \mathbf{r}_Q^0. \quad (3.61)$$

Несколько длинная, но несложная выкладка приводит к следующему результату для ω' :

$$\omega' = \omega \left\{ 1 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left[1 + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{n})}{c} \right] + (1 - v^2/c^2) \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{u})}{c}}{1 - v^2/c^2} \right\}, \quad (3.62)$$

где вектор \mathbf{n} равен

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{r^2(1 - v^2/c^2) + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2}{c^2}}}. \quad (3.63)$$

Это и есть наиболее общая формула для эффекта Доплера для равномерно движущихся источника и наблюдателя. Из нее видно, что если они относительно непод-

вижны ($\mathbf{u}=0$), то $\omega'=\omega$. Для неподвижного наблюдателя ($\mathbf{V}=0$) получаем:

$$\omega' = \omega \frac{1 + \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{v})}{c}}{1 - v^2/c^2}, \quad (3.62')$$

а для неподвижного источника ($\mathbf{v}=0$)

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{(\mathbf{n}^0, \mathbf{V})}{c} \right), \quad \mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.62'')$$

Оценим теперь $d\omega'/dt$ и dA/dt . Для оценки можно положить $A \simeq 1/r$. Поэтому условие (3.58) сводится к

$$\frac{1}{r} \left| \frac{dr}{dt} \right| < \omega', \quad \text{или} \quad r \gg \frac{v}{\omega}. \quad (3.58')$$

Если наблюдение происходит в волновой зоне, то $r \gg \gg 2\pi c/\omega'$, поэтому (3.58') выполнено во всех тех случаях, когда вообще применимы наши исходные формулы, выведенные для волновой зоны. Иначе обстоит дело с условием (3.59). Если вычислить $\frac{d\omega'}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d^2 R}{dt^2}$, пользуясь (3.60) и (3.61), то с точностью до величины первого порядка в отношении v/c , V/c получаем:

$$T \ll rc \frac{1 - (u_n/c)}{u_n^2}, \quad (3.59')$$

где u_n — проекция относительной скорости на направление источник—приемник, а u_t — проекция на направление, перпендикулярное к этой линии. При относительной скорости u порядка c для некоторых положений (малая u_n) величина постоянной времени T должна быть много меньше, нежели r/c , и условие (3.59') может оказаться весьма стеснительным. При нарушении этого условия звук гармонического самого по себе источника будет уже восприниматься как импульс, содержащий различные частоты, непрерывно распределенные.

§ 18. Звук винта самолета

Звук самолета порождается в основном двумя источниками: винтом и выхлопом мотора. Звук винта также имеет двоякую природу. Во-первых, вращающееся тело,

каковым является винт мотора, порождает периодические изменения давления и скорости воздуха вблизи ометаемой им плоскости. Эти периодические изменения воздуха сопровождаются малыми сжатиями и разрежениями, которые и распространяются в виде звуковой волны. Звуки этого происхождения называют звуком вращения ¹⁾. Во-вторых, с лопастей винта, как и со всякого движущегося в воздухе тела, срываются вихри, также сообщающие периодические импульсы окружающей винт среде.

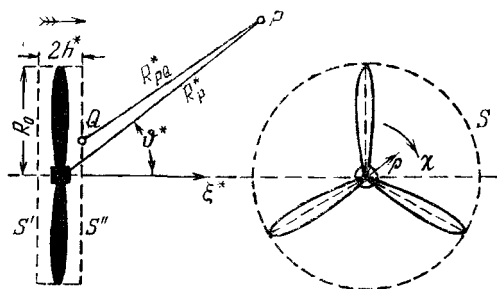


Рис. 18.

Эти периодические импульсы являются причиной другого звука, так называемого вихревого. В § 25 мы подробно рассмотрим происхождение этого звука и его основные особенности. Сейчас же мы ограничимся указанием на то, что частоты этого звука весьма высоки и сильно поглощаются в воздухе, поэтому при наблюдении звука сколько-нибудь удаленного самолета мы обычно слышим только звук вращения и притом низшие гармоники этого звука (а также низшие гармоники выхлопа). Поэтому будет вполне разумным, если мы рассмотрим в этом параграфе только звук вращения. На рис. 18 изображены винт самолета и заключающая его замкнутая поверхность S , на которой мы и будем изучать вызываемые движением винта возмущения. Торцы этой поверхности S' и S'' будем считать настолько удаленными от плоскости вращения винта, что движение газа на этой поверхности можно считать линейным (за вычетом, конечно, общего поступательного движения воздуха).

¹⁾ Термин этот введен Е. Непомнящим.

Рассмотрим сперва возможные частоты звука вращения. Пусть винт имеет n лопастей и делает N оборотов в секунду, тогда очевидно, что в каждой точке поверхности S благодаря вращению винта состояние будет периодически повторяться nN раз в секунду, так что основная частота (циклическая) звука вращения будет

$$\omega_0 = 2\pi nN, \quad (3.64)$$

а ее гармоники будут

$$\omega_m = \omega_0 m, \quad \text{где} \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Расчет интенсивности звука и его направленности для этих частот по заданной форме винта и по числу его оборотов представляет исключительные трудности ¹⁾. Мы ограничимся здесь исследованием самых общих черт этого звука и качественными оценками.

Отодвинув контрольную поверхность S в ту область, где периодические возмущения уже становятся линейными, рассмотрим свойства потенциала и его производных на торцах S' и S'' поверхности S . В качестве системы координат возьмем цилиндрическую систему ξ^* , ρ , χ , неподвижно связанную с самолетом, так что $\varphi = \varphi(\xi^*, \rho, \chi, t)$.

Так как винт равномерно вращается в той же плоскости, в которой отсчитывается угол χ , то χ и t должны входить в φ только в виде комбинации $t - (\chi/\omega)$, где $\omega = 2\pi N = \omega_0/n$ есть угловая скорость вращения винта.

Разлагая φ в ряд Фурье по времени t с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, получим:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi^*, \rho, \chi, t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(\xi^*, \rho) \exp[im(\omega_0 t - n\chi)] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(\xi^*, \rho) \exp[-im \cdot n\chi + i\omega_m t]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

В дальнейшем нам достаточно рассматривать порознь каждую из гармоник

$$\varphi_m = \psi_m(\xi^*, \rho) \exp[i(\omega_m t - mn\chi)]. \quad (3.66)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 104.

Применим теперь теорему Кирхгофа (§ 6) к потенциалу какой-либо из этих гармоник и рассмотрим волновое поле φ в удаленной от самолета точке P . Согласно (3.23) имеем:

$$\varphi_m(\xi_P^*, \eta_P, \zeta_P, t) = \frac{\exp[i(\omega_m t - k_m R_P)]}{R_P^*} Q_m, \quad (3.67)$$

где ξ_P^* , η_P , ζ_P суть координаты точки наблюдения P , а Q_m на основании (3.24) равно:

$$4\pi Q_m = \int_S \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial n} - ik_m \frac{\partial R_Q}{\partial n} \psi_m \right) \exp(-ik_m \Delta) dS + \\ + \frac{2i\beta k_m}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \psi_m \exp(-ik_m \Delta) dS_x, \quad (3.68)$$

где $\beta = v/c$, а v есть скорость самолета, $k_m = \omega_m/c$ и согласно (3.20) величина Δ есть

$$\Delta = \frac{-\beta \xi_Q^* + R_Q^* \cos \theta_{PQ}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (3.69)$$

Q — точка поверхности S (рис. 18). Из этого же рисунка следует, что

$$\cos \theta_{PQ} = \cos \vartheta_P^* \cdot \cos \vartheta_Q^* + \cos(\chi_P - \chi_Q) \sin \vartheta_P^* \cdot \sin \vartheta_Q^*, \quad (3.70)$$

$$R_Q^* = \sqrt{\rho^2 + h^{*2}}, \quad \xi_Q^* = h^*, \quad (3.70')$$

где h^* — расстояние до контрольной поверхности; $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ — расстояние от оси винта; ϑ_P^* , χ_P — углы в полярной системе, определяющие положение точки наблюдения P ; ϑ_Q^* , χ_Q — те же углы для точки Q поверхности S' (или S''). Очевидно, что

$$\cos \vartheta_Q^* = \frac{h^*}{\sqrt{\rho^2 + h^{*2}}}, \quad \sin \vartheta_Q^* = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^{*2}}}.$$

Подставляя значение Δ из (3.69) в (3.68) и ψ_m из (3.66), мы можем произвести интегрирование по χ_Q . При этом нужно иметь в виду, что

$$\int_0^{2\pi} \exp[iz \cos(\chi - \chi') - imn\chi'] d\chi' = \\ = 2\pi i \exp(-imn\chi) \cdot I_{mn}(z), \quad (3.71)$$

где $I_{mn}(z)$ есть бесселева функция первого рода, порядка $(m \cdot n)$. Пользуясь (3.71), находим из (3.68) для поверхности S' ($\xi_q^* = h_1^*$):

$$4\pi Q'_m = 2\pi i \exp(-imn\chi_P) \int_0^{r_0} \rho d\rho I_{mn} \left(\frac{k_m \rho \sin \vartheta_P^*}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \times \\ \times \exp \left[i \frac{k_m h_1^*}{\sqrt{1-\beta^2}} (\beta - \cos \vartheta_P^*) \right] \left\{ \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*} \right)_{\xi^*=h_1} - \right. \\ \left. - ik_m \psi_m \cos \vartheta_P^* + \frac{2i\beta k_m}{\sqrt{1-\beta^2}} \psi_m^* \right\}, \quad (3.72)$$

где r_0 — радиус контрольной поверхности, который можно приравнять радиусу винта, и величина $\frac{\partial R_{QP}^*}{\partial n} = \frac{\partial R_{PQ}^*}{\partial \xi^*}$ заменена для больших R_{PQ}^* на $\cos \vartheta_P^*$. Для поверхности S_2 получим аналогичное выражение Q''_m , отличающееся от (3.72) заменой ξ^* на $-h_2^*$. Складывая Q'_m и Q''_m , найдем:

$$Q_m = \frac{i}{2} \exp(-imn\chi_P) \int_0^{r_0} \rho d\rho I_{mn} \left(\frac{k_m \rho \sin \vartheta_P^*}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \times \\ \times \left\{ e^{i\chi_1} \left[\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*} \right)_1 + \left(\frac{2i\beta k_m}{\sqrt{1-\beta^2}} - ik_m \cos \vartheta_P^* \right) (\psi_m)_1 \right] + \right. \\ \left. + e^{i\chi_2} \left[- \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*} \right)_2 + \left(\frac{2i\beta k_m}{\sqrt{1-\beta^2}} + ik_m \cos \vartheta_P^* \right) (\psi_m)_2 \right] \right\}. \quad (3.73)$$

В силу малости величины $k_m h^*$ фазовые множители $e^{i\chi_1}$ и $e^{i\chi_2}$ можно разложить в ряд по степеням $k_m h^*$:

$$e^{i\chi_1} = 1 + \frac{ik_m h_1^*}{\sqrt{1-\beta^2}} (\beta - \cos \vartheta_P^*) + \dots, \\ e^{i\chi_2} = 1 - \frac{ik_m h_2^*}{\sqrt{1-\beta^2}} (\beta - \cos \vartheta_P^*) + \dots \quad (3.74)$$

Тогда получим:

$$Q_m = \frac{i}{2} \exp(-imn\chi_P) \int_0^{r_0} \rho d\rho I_{mn} \left(\frac{k_m \rho \sin \vartheta_P^*}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \times \\ \times [A_m(\rho) + B_m(\rho) \cos \vartheta_P^* + C_m(\rho) \cos^2 \vartheta_P^* + \dots], \quad (3.75)$$

где $A_m(\rho)$ можно рассматривать как плотность силы нулевых источников, распределенных уже в плоскости вращения винта, причем

$$A_m(\rho) = \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*}\right)_1 - \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*}\right)_2 + \frac{2i\beta k_m}{\sqrt{1-\beta^2}} [(\psi_m)_1 - (\psi_m)_2] + \\ + \frac{ik_m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*}\right)_1 h_1^* + \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*}\right)_2 h_2^* \right] - \\ - \frac{2\beta^2 k_m^2}{\sqrt{1-\beta^2}} [(\psi_m)_1 h_1^* + (\psi_m)_2 h_2^*], \quad (3.76)$$

величину $B_m(\rho)$ — как плотность силы дипольных источников:

$$B_m(\rho) = -ik_m [(\psi_m)_1 - (\psi_m)_2] - \\ - \frac{ik_m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*}\right)_1 h_1^* + \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^*}\right)_2 h_2^* \right], \quad (3.77)$$

величину $C_m(\rho)$ — как плотность квадрупольных источников:

$$C_m(\rho) = -\frac{\beta^2 k_m^2}{\sqrt{1-\beta^2}} [(\psi_m)_1 h_1^* + (\psi_m)_2 h_2^*], \quad (3.78)$$

и т. д. Таким образом, у нас фигурируют неизвестные функции ψ_m и $\partial \psi_m / \partial \xi^*$ при $\xi^* = h_1^*$ и $\xi^* = -h_2^*$. Эти функции не независимы друг от друга, так как задание какой-нибудь одной из них на контрольной поверхности S определяет однозначно решение волнового уравнения. Задавать их можно только в тех случаях, когда из каких-либо предварительных соображений можно считать, что взятые значения ψ_m и $\partial \psi_m / \partial \xi^*$ аппроксимируют истинные и, таким образом, согласованы между собой. Вычисление этих величин и представляет основную проблему для расчета звука самолета ¹⁾. В интеграле (3.75) величины A_m ,

¹⁾ Попытки вычислить эти величины делались неоднократно (см. литературу в конце книги, в особенности книгу Е. Непомнящего «Исследование и расчет звука воздушного винта»). Однако эти расчеты не представляются вполне надежными, так как используют соотношения линейной акустики в нелинейной области. В частности, не учитывается наличие постоянного потока воздуха, величина

B_m, C_m, \dots не должны менять своего знака как функции ρ , по крайней мере в области наиболее эффективных значений ρ (в рабочей части лопасти винта). Легко видеть, что то же относится и к величине $I_{mn} \left(\frac{k_m \rho \sin \vartheta_P^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$. В самом деле,

$$k_m \rho = \frac{2\pi n m N \rho}{c} = n m \frac{v(\rho)}{c},$$

где $v(\rho)$ — окружная скорость дужки винта. Корни x'_{mn} уравнения $I_{mn}(x) = 0$ обладают тем свойством, что $x'_{mn} > mn$, но $v/c < 1$. Поэтому в области интеграции $0 < \rho < r_0$ аргумент I_{mn} — меньше x'_{mn} . В силу этого мы можем вынести I_{mn} из-под знака интеграла, заменив там ρ на некоторое эффективное значение $\rho = R_0$. Тогда получается:

$$Q_m = \frac{i}{4\pi} \exp(-imn\chi_P) \pi R_0^2 I_{mn} \left(\frac{k_m R_0 \sin \vartheta_P^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \times \\ \times \{A_m + B_m \cos \vartheta_P^* + C_m \cos^2 \vartheta_P^* + \dots\}, \quad (3.79)$$

где A_m, B_m, C_m, \dots — средние значения этих величин по длине лопасти винта. Поскольку величины A_m, B_m, C_m, \dots представляют собой коэффициенты разложения по малому параметру $k_m h^*$, постольку среди членов в фигурных скобках (3.79) должен иметь преобладающее значение A_m , т. е. источник нулевого порядка. Поэтому направленность звука винта самолета в основном будет определяться множителем I_{mn} , а остальные члены в (3.79) будут лишь несколько деформировать и смещать кривую направленности, даваемую этим множителем. Так как не только корни уравнения $I_{mn}(x) = 0$ превосходят $m \cdot n$,

$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (здесь ρ — плотность воздуха) приравнивается давлению p на лопасть винта, в то время как

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{(\nabla \phi)^2}{2},$$

и т. п. Поэтому трудно достигнуть таким путем чего-либо большего, чем согласие в самых общих чертах.

но также и те значения x''_{mn} , которые отвечают максимуму $I_{mn}(x)$, то

$$I_{mn} \left(\frac{k_m R_0 \sin \vartheta^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

будет монотонно возрастать при росте ϑ^* до $\pi/2$, а затем падать до 0 при $\vartheta^* = \pi$. Таким образом, максимум излучения будет лежать при $\vartheta^* = \pi/2$, т. е. в плоскости, перпендикулярной к линии полета самолета (в плоскости вращения винта)¹⁾.

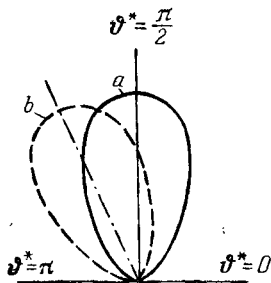


Рис. 19.

Подобная кривая приведена на рис. 19 (кривая *a*). На самом деле обычно наблюдается заметная асимметрия кривой направленности (рис. 19, кривая *b*), что указывает на то, что роль дипольного излучения не может быть совсем игнорируема (по сравнению с ролью излучения нулевого порядка. Напомним, что обе кривые относятся к системе координат, покоящейся относительно самолета.

Обратимся теперь к распределению интенсивности в спектре звука винта. Для этого заметим, что величина Q_m в (3.79) имеет смысл объемной скорости. Ее основной член содержит величину A_m , равную приблизительно сумме компонент скоростей воздуха, нормальных к поверхности S . Эти скорости вызваны вытеснением воздуха при движении лопастей винта и могут быть поставлены в прямую зависимость от скорости движения этих лопастей.

Рассмотрим нормальную к S_1 компоненту скорости воздуха $u(t - \chi/\omega, \rho, \xi^*)$. К ней применимо то же разложение (3.65) в ряд Фурье, какое мы имели для χ , а именно

$$u \left(t - \frac{\chi}{\omega}, \rho, \xi^* \right) = \sum_m u_m(\rho, \xi^*) \exp[i m (\omega_0 t - n \chi)], \quad (3.80)$$

¹⁾ Мы сейчас игнорируем различия между ϑ и ϑ^* , так как эти углы отличаются на величины порядка β^2 .

откуда

$$u_m(\rho, \xi^*) \exp(-imn\chi) = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} u\left(t - \frac{\chi}{\omega}, \rho, \xi^*\right) \exp(-im\omega_0 t) dt. \quad (3.81)$$

Если ширина лопасти при ρ равна l (ρ), то мы можем считать, что u , в функции времени, имеет вид импульса, длящегося в течение времени $\tau = l/v = l/\omega_0 \rho$, так что $u = u_0$ для $0 < t < \tau$ и $u = 0$ вне этого промежутка. Выполняя при этом предположении интегрирование в (3.81), найдем:

$$u_m(\rho, \xi^*) \exp(-imn\chi) = -\frac{u_0}{T} \cdot \frac{\exp(-im\omega_0 T) - 1}{im\omega_0} = \frac{iu_0}{2\pi m} \left[\exp\left(-im\frac{l}{\rho}\right) - 1 \right]. \quad (3.82)$$

Отсюда видно, что амплитуда u_m весьма медленно убывает с ростом m , так что спектр звука самолета должен быть весьма богат гармониками, что и наблюдается на самом деле ¹⁾.

§ 19. Особенности движения при сверхзвуковой скорости. Скачки уплотнения

Прежде чем обратиться к непосредственно интересующей нас задаче об излучении звука источником, движущимся со сверхзвуковой скоростью, мы остановимся на тех особых явлениях, которые возникают при обтекании тела, имеющего скорость движения, превосходящую скорость звука в среде c .

Существенное отличие обтекания при $v > c$ от обтекания при $v < c$ может быть уже усмотрено из уравнения для потенциала скоростей Φ , описывающего поток сжимаемой жидкости. Согласно обобщенному уравнению Бернулли (1.27') имеем:

$$w = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2. \quad (3.83)$$

¹⁾ Конечно, мы сделали слишком упрощающие предположения, чтобы рассчитывать на нечто большее, чем качественное заключение. Вычисление формы импульсов произведено в цитированной выше книге Е. Непомнящего. Однако, как мы уже указывали, следовало бы выбрать значения импульса на подходящей контрольной поверхности, обычно же вычисляют их значение в плоскости винта.

С другой стороны, уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla \Phi) = 0 \quad (3.84)$$

(так как $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$). Замечая, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \nabla w = \frac{c^2}{\rho} \nabla \rho,$$

и выражая в (3.84) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\nabla \rho$ через $\partial w / \partial t$, ∇w , а w с помощью (3.83) через Φ , мы найдем:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi)^2 - \left(\frac{\nabla \Phi}{c^2}, \nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] \right) = 0. \quad (3.85)$$

Если ввести теперь такую местную систему координат x, y, z , что ось Ox направлена по нормали к поверхности $\Phi = \text{const}$ (т. е. по направлению скорости \mathbf{v} в рассматриваемой точке), а оси Oy и Oz лежат в касательной плоскости, то уравнение (3.85) принимает вид:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.86)$$

Если в какой-нибудь точке потока скорость потока v превзойдет местную скорость звука c , то коэффициент при $\partial^2 \Phi / \partial x^2$ станет отрицательным, так что координата x войдет как бы на одних правах с временем; уравнение эллиптического типа относительно координат превратится в уравнение гиперболического типа. Эти два типа уравнений коренным образом отличаются друг от друга. Гиперболическое уравнение имеет разрывные решения, которые не определяются однозначно граничными условиями. Простой пример этому будет приведен ниже.

На самом деле при движении тел со сверхзвуковой скоростью в среде возникают так называемые скачки уплотнения, или ударные волны. Эти скачки распространяются на большое расстояние от движущегося тела вдоль поверхностей, которые при малой величине скачка приблизительно совпадают с характеристиками уравнения (3.86). В скачке уплотнения состояние среды меняется скачкообразно. Такое скачкообразное изменение претерпевают сразу все характерные для среды величины:

скорость, плотность, давление, температура и энтропия. Изучая распространение звука от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью, было бы последовательным исходить из того состояния среды, которое создается движением нашего источника, а звук рассматривать как малое возмущение. Однако по сию пору отсутствуют общие методы решения задачи об обтекании тела потоком сверхзвуковой скорости, поэтому мы не располагаем теорией, позволяющей найти в этом случае поле

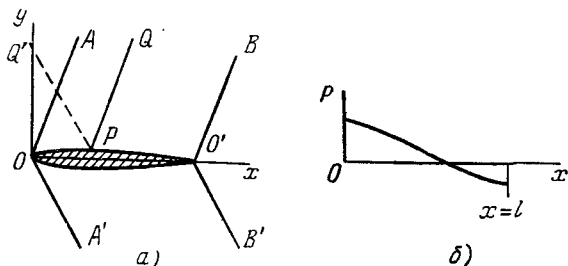


Рис. 20.

скоростей и давлений и определить величину и положение скачков уплотнения, возникающих при сверхзвуковых течениях. В силу этого мы принуждены ограничиться рассмотрением некоторых частных задач и качественным анализом явлений.

После этих предварительных замечаний мы обратимся к простейшим случаям сверхзвукового движения, допускающим несложный математический анализ.

Рассмотрим тонкое, бесконечно длинное крыло. Профиль такого крыла приведен на рис. 20. Поток в этом случае двумерный, и пусть его скорость равна $v > c$. Предполагая, что крыло тонкое (и угол атаки мал), мы можем считать, что вносимое им возмущение в поток также невелико. Соответственно этому допущению представим потенциал $\Phi(x, y)$ в виде

$$\Phi = -vx + \varphi(x, y), \quad (3.87)$$

где φ — малая поправка. Подставляя (3.87) в (3.86), мы найдем:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (3.88)$$

где c — значение скорости звука в невозмущенном потоке. Полагая

$$x = \tau \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \beta = v/c > 1, \quad (3.89)$$

получаем вместо (3.88)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (3.90)$$

Как и следует из общей теории, мы приходим к уравнению гиперболического типа. Если τ рассматривать как время, то оно совпадает с уравнениями для распространения волн в одном измерении (y) со скоростью, равной 1.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = f_1(\tau - y) + f_2(\tau + y). \quad (3.91)$$

Возмущения, порождающие φ , расположены (по профилю крыла) от $\tau = 0$ до $\tau = \frac{l}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$ и распространяются согласно

(3.91) без изменения своей силы по линиям $y = \tau$, $y = -\tau$ (например, PQ и PQ' на рис. 20, а). Допущение, что $f_2 \neq 0$ для $y > 0$, означало бы, что возмущение забегает вперед крыла на какое угодно большое расстояние. Это противоречит причинности, поэтому мы примем для $y > 0$, что $f_2 = 0$, и по тем же основаниям $f_1 = 0$ для $y < 0$ ¹⁾. Тогда

$$\varphi = f_1(\tau - y), \quad y > 0 \quad \text{и} \quad \varphi = f_2(\tau + y), \quad y < 0. \quad (3.92)$$

При таком выборе решений возмущения сосредотачиваются в полосах $OABO'$ и $OA'B'O'$. Наклон этих полос определяется уравнением

$$y = \pm \tau = \pm \frac{x}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad (3.93)$$

так что угол $\varepsilon = AOO'$, называемый *углом Маха*, равен

$$\sin \varepsilon = 1/\beta = c/v. \quad (3.94)$$

Мы можем теперь связать вид функций f_1 и f_2 с формой профиля крыла. Обозначая нормаль к поверхности крыла

¹⁾ В этом дополнительном требовании и сказывается указанная выше особенность уравнений гиперболического типа.

через n , мы будем иметь следующее условие на поверхности крыла:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -v \cos(x, n) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(y, n) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(x, n) = 0, \quad (3.95)$$

выражающее равенство нулю компоненты скорости, нормальной к поверхности крыла. Если профиль крыла тонкий и всюду угол атаки элементов ее поверхности мал, то $\cos(x, n) \approx 0$, $\cos(y, n) \approx 1$. Поэтому условие (3.95) приближенно запишется так:

$$\pm \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = v \cos(x, n). \quad (3.96)$$

Знак (+) для верхней поверхности, знак (—) для нижней. Подставляя сюда φ из (3.92), получаем для верхней поверхности:

$$\left(\frac{df_1}{dy} \right)_{y=0} = - \frac{df_1(\tau)}{d\tau} = v \cos(x, n), \quad (3.97)$$

и так как $\cos(x, n)$ дан на профиле крыла как функция x , а следовательно, и как функция τ , то этим определяется потенциал $f_1(\tau)$ с точностью до неизвестной постоянной. Подобным же образом находится и $f_2(\tau)$. Из (3.92) и (3.97) находим дополнительную скорость на оси Ox :

$$\Delta v_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{df_1(\tau - y)}{d\tau \sqrt{\beta^2 - 1}} = \frac{v}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \cos(x, n), \quad (3.98)$$

где $\cos(x, n)$ рассматривается как функция $(\tau - y)$.

С помощью уравнения (3.83) мы можем найти и изменение давления $\Delta p = p - p_0$ по сравнению с давлением в невозмущенном потоке p_0 . Именно, при малых Δp имеем из (3.83):

$$\frac{\Delta p}{\rho_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{v^2}{2}. \quad (3.99)$$

Константа $v^2/2$ выбрана так, что в невозмущенном потоке, где $(\nabla \Phi)^2 = v^2$, $\partial \Phi / \partial t = 0$, имелось бы $p = p_0$. Подставляя сюда Φ из (3.87) и пренебрегая высшими степенями φ и степенями производных φ , получаем:

$$\Delta p = \rho_0 v \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (3.100)$$

откуда на основании (3.98)

$$\Delta p = \frac{-\rho v^2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \cos(x, n). \quad (3.101)$$

В точке $x=0$ (точка встречи потока с профилем) $\cos(x, n) \leq 0$, а в точке сбегаия ($x=l$) величина $\cos(x, n) \geq 0$. Вне интервала $0 < x < l$ имеем $\cos(x, n) = 0$. Поэтому давление Δp имеет вид, приведенный на рис. 20, б). В точке набегаия имеет место разрыв движения. Вычисляемое из такой теории сопротивление тон-

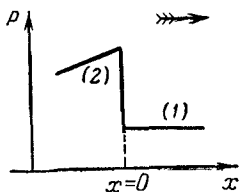


Рис. 21.

кого крыла хорошо согласуется с опытом [34]. Как давление Δp , так и скорость Δv_x сохраняют свое значение вдоль линии $y = \pm \tau$, т. е. вдоль линий, наклоненных к потоку под углом Маха ϵ ($\sin \epsilon = c/v$).

Приведенное выше решение, демонстрирующее наличие разрывов при обтекании тела сверхзвуковым пото-

ком, пригодно, в сущности, при бесконечно малых скачках уплотнения. Теория скачков уплотнения конечной величины не может быть получена из рассмотрения лишь одних дифференциальных уравнений гидродинамики, так как эти уравнения теряют свою силу как раз в области скачка и должны быть заменены там надлежащими краевыми условиями. Чтобы найти их, рассмотрим скачок уплотнения вида изображенного на рис. 21; (1) есть область невозмущенной среды, а (2) — область скачка. Пусть скачок движется со скоростью V в направлении положительной оси x . Естественно взять такую систему координат, в которой скачок покоится. В этой системе скорости газа по оси Ox в областях (1) и (2) будут

$$u_1 = -V, \quad u_2 = U_2 - V, \quad (3.102)$$

где U_2 — абсолютная скорость газа в области скачка. Для вывода условий на скачке нам следовало бы переписать основные уравнения гидродинамики в интегральной форме; однако, как было объяснено в гл. I, эти уравнения представляют собой не что иное, как три закона сохранения, и этим фактом мы можем воспользоваться, непосредственно применяя эти законы к области скачка

уплотнения. Поток вещества, поток импульса и поток энергий по обе стороны скачка должны быть одинаковы. Пользуясь выражениями для этих величин (1.9), (1.10), (1.11) и пренебрегая сейчас вязкостью и теплопроводностью, получим закон сохранения вещества:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (3.103)$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности газа до скачка и после него. Далее, закон сохранения импульса:

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2, \quad (3.104)$$

где p_1 и p_2 — давление до скачка и после него, и, наконец, закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} \rho_1 u_1^3 + \rho_1 E_1 u_1 + p_1 u_1 = \frac{1}{2} \rho_2 u_2^3 + \rho_2 E_2 u_2 + p_2 u_2, \quad (3.105)$$

где E_1 и E_2 — энергия единицы массы газа до скачка и после него.

Пользуясь (3.103), уравнение (3.105) можно написать в виде

$$\frac{1}{2} u_1^2 + w_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + w_2, \quad (3.105')$$

где $w = E + p/\rho$ есть тепловая функция. Из этих трех уравнений находим:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}} = -V, \quad (3.106)$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}}, \quad (3.107)$$

и, пользуясь еще уравнениями для идеального газа

$$E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad (3.108)$$

получаем соотношение Гюгоньо ¹⁾ [35]:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (3.109)$$

Уравнения (3.106), (3.107) и (3.109) позволяют вычислить все данные, относящиеся к скачку, коль скоро дано дав-

¹⁾ Это соотношение было установлено еще Ранкином [36]; см. также [37].

ление p_1 и плотность газа ρ_1 перед скачком, а также одна из величин, характеризующих скачок, например p_2 .

В заключение вычислим еще изменение энтропии, имеющее место в скачке уплотнения. Из уравнения (1.34) следует, что энтропия единицы массы газа равна

$$S = S_0 + c_p \ln \frac{p}{p_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma. \quad (3.110)$$

Из этого уравнения находим изменение энтропии:

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = c_p \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (3.111)$$

Если воспользоваться соотношениями Гюгоньо, то нетрудно убедиться, что для скачка уплотнения эта величина больше нуля, так что процессы в скачке имеют необратимый характер. Как раз по этой причине невозможно ограничиться дифференциальными уравнениями гидродинамики. Движение скачка, как видно, идет в направлении увеличения энтропии, так как газ перед скачком имеет меньшую энтропию, нежели позади него, и скачок движется в направлении от (2) к (1). Скорость этого движения $V = -u_1$ легко найти из предыдущих уравнений, если исключить из (3.106) и (3.109) p_2 и ρ_1 . Тогда получается:

$$u_1^2 = V^2 = \frac{c^2}{2\gamma} \left[(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\gamma - 1) \right], \quad (3.112)$$

где c — адиабатическая скорость звука в спокойном газе (1.35). Так как $p_2 > p_1$, то $V^2 > c^2$, т. е. скачок всегда движется со скоростью, большей скорости звука в той среде, в которую он вступает.

Выведенные здесь соотношения будут использованы нами при анализе работы приемника звука, движущегося со скоростью, большей скорости звука в среде.

§ 20. Источник звука, движущийся со сверхзвуковой скоростью и имеющий малое лобовое сопротивление

В этом параграфе мы рассмотрим излучение звука источником, движущимся со скоростью $v > c$ и имеющим малое лобовое сопротивление. Теория такого источника

звука в значительной мере аналогична изложенной в § 19 теории бесконечно тонкого крыла. Источник звука мы будем представлять себе помещенным на удобообтекаемое тело (рис. 22). Профиль тела зададим кривой в цилиндрической системе координат (ρ, ξ, χ) :

$$\rho = \rho_0'(\xi). \quad (3.113)$$

Поперечник тела $\pi \rho_0^2$ будем считать бесконечно малым.

Предположим далее, что поверхность этого тела или ее часть совершает малые колебания частоты ω . Эта вибрация и будет источником звука. Потенциал потока Φ представим в виде

$$\Phi = -vx + \varphi_0 + \varphi, \quad (3.114)$$

где $-vx$ есть потенциал невозмущенного потока, φ_0 — потенциал, вызванный движением тела, φ — потенциал, вызванный колебаниями поверхности тела (он пропорционален $e^{i\omega t}$). Потенциал φ_0 для нас не представляет интереса, так как он в системе координат, связанной с телом, не зависит от времени¹⁾. Предположение о малом поперечнике тела позволяет нам ограничиться линейной теорией. В силу этого решение будет суперпозицией стационарного решения и нестационарного звукового поля. Таким образом задача сводится к определению φ .

Для решения этой задачи мы используем метод источников. Для этого мы определим сперва поле точечного источника звука, движущегося со сверхзвуковой скоростью, а затем возьмем надлежащее распределение этих источников по поверхности тела вращения. Пусть в системе координат, связанной с нашим телом, имеется точечный источник, находящийся в точке ξ_0, η_0, ζ_0 , лежащей на поверхности рассматриваемого нами тела. В неподвижной системе координат координаты этого источника будут

$$X = vt + \xi_0, \quad Y = \eta_0, \quad Z = \zeta_0. \quad (3.115)$$

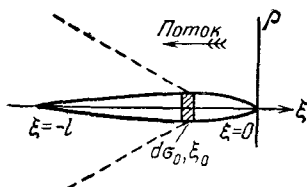


Рис. 22.

¹⁾ φ_0 можно определить методом, сходным с изложенным в § 19 для тонкого крыла. См. Т. Карман [34], стр. 81.

Мощность этого источника dQ будем считать бесконечно малой и пропорциональной элементу $d\sigma_0 = 2\pi\rho_0 d\xi_0$ поверхности тела, на которой он расположен:

$$dQ = q(t, \xi_0, \eta_0, \zeta_0) d\sigma_0 \delta(x - vt - \xi_0) \delta(y - \eta_0) \delta(z - \zeta_0). \quad (3.116)$$

В этой формуле малая величина

$$dF = q(t, \xi_0, \eta_0, \zeta_0) d\sigma \quad (3.117)$$

имеет то же значение, что и F в формуле (3.37). Поэтому мы можем написать в соответствии с (3.48) решение для точечного источника в виде

$$d\varphi(x, y, z, t) = \sum \frac{[q] d\sigma_0}{R^* \sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad (3.118)$$

где $[q] = q(t - R/c, \xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ и R и R^* по-прежнему определяются из уравнений (3.46) и (3.49). Однако в случае $v > c$ прежнее утверждение о единственности положительного корня уравнения (3.46) неверно. Решая теперь уравнение (3.46), которое будет гласить

$$f(R) \equiv \{x - v(t - R/c) - \xi_0\}^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2 - R^2 = 0, \quad (3.119)$$

мы получаем:

$$R = \frac{\pm R^* - \beta \xi^*}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad R^* = \sqrt{\xi^{*2} - \rho^2}, \quad (3.120)$$

где

$$\xi^* = \frac{x - vt - \xi_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}} = \frac{\xi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad \eta = y - \eta_0, \quad \zeta = z - \zeta_0; \quad (3.121)$$

при этом, как мы сейчас покажем, оба корня уравнения (3.120) больше нуля. Из выражения (3.120) для R^* видно, что ξ^{*2} должно быть больше ρ^2 ; таким образом, все решение лежит внутри конуса

$$\xi^{*2} - \rho^2 \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\xi^2}{\beta^2 - 1} = \rho^2. \quad (3.122)$$

Образующие этого конуса исходят из точки $vt + \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, в которой находятся источники, и, как видно из (3.122), наклонены к скорости v (к оси ξ) под углом Маха ϵ :

$$\sin \epsilon = c/v. \quad (3.123)$$

Исключая возможность возмущения впереди источника, мы должны ограничиться областью $\xi < 0$ (рис. 22)¹⁾, но $-\beta\xi^*$ для $\xi^* < 0$ всегда больше R^* . Стало быть, R положительно, и оба решения (3.120) являются запаздывающими. Физическая сущность такого двойного решения заключается в том, что в каждую точку P (рис. 23), заключенную внутри конуса Маха, приходят два звука. Если в рассматриваемый момент источник занимает позицию Q , то Q' и Q'' суть два эффективных положения источника, из которых звук приходит в точку P в момент t . При дозвуковой скорости эффективное положение только одно.

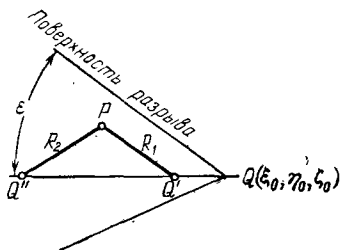


Рис. 23.

Решение для точечного источника не имеет смысла в непосредственной близости к источнику (где оно обращается в бесконечность). Из наших расчетов видно, что при сверхзвуковой скорости источника существует не только сингулярная точка, но целая поверхность (конус Маха), на которой решение обращается в бесконечность. Стало быть, если ограничиться точечным источником, то нельзя придавать смысла решению (3.118) не только вблизи самого источника, но и вблизи конуса Маха. Мы можем, однако, воспользоваться этим решением для построения поля распределенного источника, а также для качественного анализа явлений при сверхзвуковых скоростях. Считая, что q гармонически зависит от времени t ,

$$q = q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) e^{i\omega t}, \quad (3.124)$$

мы получаем из (3.118) в качестве решения, представляющего поле элемента поверхности тела:

$$d\varphi = \frac{q_0 d\sigma_0}{R^* \sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_1}{c} \right) \right] + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_2}{c} \right) \right] \right\}, \quad (3.125)$$

¹⁾ Подобное же предположение мы делали в теории тонкого крыла, когда отбрасывали f_2 при $y > 0$ и f_1 при $y < 0$.

где R_1 и R_2 — два корня уравнения (3.119). Это решение справедливо внутри конуса Маха, имеющего вершину в точке ξ_0, η_0, ζ_0 . Полное поле от всех элементов поверхности, совершающих колебание с частотой ω , будет

$$\varphi = \int \frac{q_0 d\sigma_0}{R^* \sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_1}{c} \right) \right] + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_2}{c} \right) \right] \right\}. \quad (3.126)$$

При этом интеграл распространяется по области

$$\frac{\xi^2}{\beta^2 - 1} \geq \rho^2; \quad \xi = x - vt - \xi_0 < 0; \quad \rho^2 = (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2. \quad (3.127)$$

Допустим, что излучающие элементы расположены от $\xi_0 = -l$ до $\xi_0 = 0$ по кольцам, так что в цилиндрической системе координат ξ, ρ, χ величина q_0 зависит от ξ . Имея в виду, что $d\sigma_0 = \rho_0 d\chi d\xi$ и обозначая $q_0 \rho_0 = a_0(\xi_0)/2\pi$, при $\rho_0 \rightarrow 0$ мы получаем из (3.126):

$$\varphi = \int \frac{a_0(\xi_0) d\xi_0}{R^* \sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_1}{c} \right) \right] + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_2}{c} \right) \right] \right\}. \quad (3.128)$$

Если длина волны гораздо больше размеров излучателя ($kl = \frac{\omega}{c} l \ll 1$), то фазовые факторы можно вынести из-под знака интеграла, и мы получим:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_1}{c} \right) \right] + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_2}{c} \right) \right] \right\} \int \frac{a_0(\xi_0) d\xi_0}{R^* \sqrt{\beta^2 - 1}}. \quad (3.129)$$

Последний интеграл совпадает с интегралом, рассматриваемым Карманом в его теории сопротивления тонких тел при сверхзвуковой скорости, и имеет всюду конечное значение [34]. Заметим, что вдали от конуса Маха, там, где $R^* \gg l$, величину R^* можно вынести из-под знака интеграла, и тогда получается совсем простой результат:

$$\varphi = \frac{A_0}{R^* \sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_1}{c} \right) \right] + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_2}{c} \right) \right] \right\}, \quad (3.130)$$

где

$$A_0 = \int_{-1}^0 a_0(\xi_0) d\xi_0. \quad (3.131)$$

Величина $a_0(\xi_0)$ должна быть определена из того условия, что производная $-\partial\varphi/\partial\rho$ при $\rho \rightarrow 0$ должна равняться скорости элемента поверхности тела, совершающего колебания с частотой ω . Метод для определения $a_0(\xi_0)$ был дан Карманом в упомянутой выше теории сопротивления тонкого тела вращения [34].

Из решения (3.130) следует, что поверхности постоянной амплитуды будут гиперboloидами $R^* = \text{const}$, т. е.

$$\frac{\xi^2}{\beta^2 - 1} - \rho^2 = \text{const} > 0. \quad (3.132)$$

Эти гиперboloиды [изображены на рис. 24. Они асимптотически касаются конуса Маха. Напомним, что при дозву-

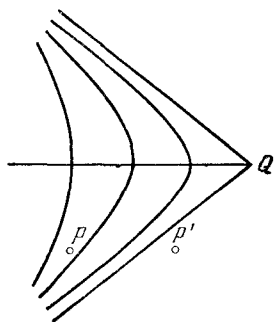


Рис. 24.

ковой скорости поверхности постоянной амплитуды суть эллипсоиды (ср. рис. 14), а для покоящегося источника — сферы. В точке пространства P' , лежащей вне конуса Маха, вообще не будет звукового поля, а в каждой точке P , лежащей внутри этого конуса, будет иметься два поля, исходящих из двух эффективных положений источника звука Q' , Q'' . Допуская, что условия, при которых можно говорить об эффекте Доплера (ср. § 17), соблюдены, мы приходим к заключению, что в точке P будут восприниматься две «мгновенные» частоты одновременно:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR_1}{dt} \right), \quad \omega'' = \omega \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR_2}{dt} \right). \quad (3.133)$$

Таким образом, в этом случае имеет место то, что целесообразней было бы назвать не доплеровским смещением частоты, а доплеровским расщеплением. Частоты ω' и ω''

легко вычисляются на основании формулы для R_1 и R_2 (3.120):

$$\omega' = \omega \frac{\beta \frac{\xi^*}{R^*} - 1}{\beta^2 - 1}, \quad \omega'' = \omega \frac{\beta \frac{\xi^*}{R^*} + 1}{\beta^2 - 1}. \quad (3.134)$$

В частности, на оси Ox ($\rho = 0$) получаем:

$$\omega' = -\frac{\omega}{\beta - 1}, \quad \omega'' = -\frac{\omega}{\beta + 1}. \quad (3.135)$$

Отсюда видно, что если $1 < \beta < 2$, то $|\omega'| > \omega$, а $|\omega''| < \omega$; если же $\beta > 2$, то обе частоты меньше ω , т. е. мы слышим в этом случае пониженные [по сравнению с исходным (ω)] тоны.

§ 21. Звуковое поле источника звука при сверхзвуковой скорости движения

В предыдущем параграфе нами был рассмотрен источник звука бесконечно малого поперечного сечения, движущийся равномерно со сверхзвуковой скоростью. Предполагая такую форму источника, мы имели возможность рассматривать всю задачу линейно, состояние среды в этом крайнем, идеализированном случае представлялось как простое наложение состояний, одно из которых определялось движением тела (решение Кармана), а другое колебаниями его поверхности (излучение звука). При конечных размерах сечения тела такое простое наложение уже не имеет места. Поступательное движение тела конечного сечения вызывает в среде значительные изменения плотности, давления и температуры и приводит к образованию скачков уплотнения конечной величины.

Ввиду различия в сжатии струи, обтекающей тело, в разных местах этого тела, скорость звука c не является во всех точках одинаковой. В силу этого и угол Маха $\epsilon = \arcsin(c/v)$ для разных точек пространства около тела различен. Поверхности разрыва (скачков уплотнения) не имеют по этой причине формы конуса и только вдали от тела приобретают эту простую форму. На рис. 25, 26 демонстрируются скачки уплотнения, возникающие при движении артиллерийских снарядов различной формы,

снятые полутеневым методом ¹⁾. Таким образом, состояние среды вблизи самого тела весьма сложно, и, как уже упоминалось, по сию пору неизвестны решения гидродинамических уравнений для этого случая ²⁾.

Однако вдали от тела положение проще. Мы можем, по крайней мере для выяснения геометрической и кине-

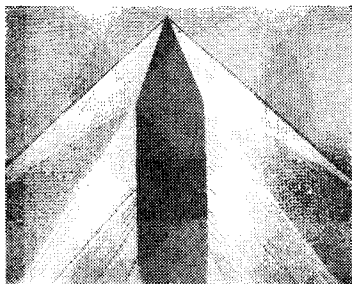


Рис. 25.

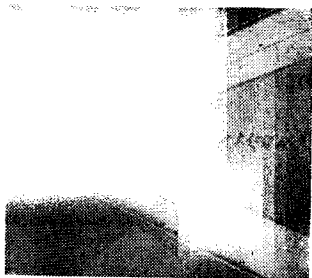


Рис. 26.

матической стороны дела, представлять себе, что возмущение вдали от тела является результатом сложения возмущений, распространяющихся со скоростью звука от каждой точки поверхности обтекаемого тела. При этом мы неизбежно должны игнорировать различия в скорости распространения звука вблизи тела, поэтому принятая нами точка зрения в сущности игнорирует конечные размеры тела, так что последовательно было бы рассматривать точечный источник звука. Но последний приводит к бесконечно большой величине скачка уплотнения на конусе Маха. Поэтому мы можем применить теорию точечного источника к интересующей нас проблеме, однако ограничившись рассмотрением кинематической стороны дела. Такие вопросы, как, например, вопрос о величине скачка, об изменении его с расстоянием от тела, не могут быть рассмотрены с такой точки зрения. С этими оговорками мы можем применить изложенную выше теорию (§ 20) точечного источника к интересующему нас вопросу

¹⁾ О фотографировании полутеневым методом см. [38].

²⁾ Кроме случая обтекания конуса (см. [2]).

об излучении звука источником, движущимся произвольным образом.

Согласно (3.48) поле точечного гармонического источника определяется потенциалом

$$\varphi = A_0 - \sum_k \frac{\exp[i\omega(t - R_k/c)]}{R_k^*}, \quad (3.136)$$

причем величины R_k (в общем случае число их может быть и больше двух) определяются как положительные корни уравнения:

$$f(R) \equiv \{x - X(t - R/c)\}^2 + \{y - Y(t - R/c)\}^2 + \{z - Z(t - R/c)\}^2 - R^2 = 0, \quad (3.137)$$

а величины R_k^* определены уравнением ¹⁾

$$R_k^* = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{R=R_k}. \quad (3.138)$$

Очевидно, что поверхности

$$R_k^* = 0 \quad (3.139)$$

суть не что иное, как поверхности, представляющие собой огибающие элементарных возмущений, распространяющихся от источника звука. Это дает возможность простого геометрического построения поверхностей $R_k^* = 0$, являющихся поверхностями разрыва потенциала, т. е. поверхностей скачков уплотнения (строго говоря, мы не имеем права рассматривать состояние в непосредственной близости от этих поверхностей, так как на них $\varphi = \infty$).

Для такого построения следует построить семейство шаров, представляющих фронты сферических волн, исходящих из нашего источника в различные моменты времени, и начертить огибающие этих шаров. На рис. 27 приведено это построение для равномерно движущегося источника звука: а) для дозвуковой скорости, когда огибающая отсутствует, и б) для сверхзвуковой скорости. В этом случае огибающая есть конус Маха с вершиной в месте нахождения источника. Из последнего построе-

¹⁾ Здесь R_k^* отличается от прежнего множителем.

ния ясно виден также двойной характер поля при $v > c$; в точку P , в принятый на рисунке момент времени, приходит возмущение из двух точек Q_1 и Q_2 (сзади от P и спереди от P).

Скачок уплотнения называют также часто ударной или баллистической волной.

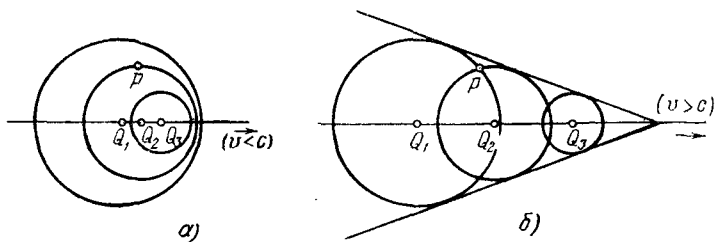


Рис. 27.

Удачность этого термина станет понятной, если рассмотреть скачок уплотнения по отношению к неподвижному наблюдателю или вообще приемнику звука (давления). Скачок уплотнения, двигаясь вместе с источником звука при прохождении мимо приемника звука, приведет

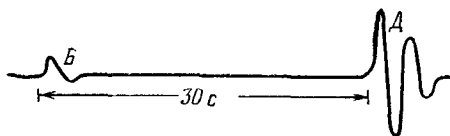


Рис. 28.

к скачкообразному разрывному нарастанию давления в приемнике с последующими за этим скачком более плавными изменениями давления. На рис. 28 показано давление в баллистической (B) и дульной волне (D), по записи Э. Эксклагона, от 305-миллиметрового снаряда. Таким образом, ход давления в приемнике со временем будет носить характер импульса, удара.

Приведенная выше задача о нахождении огибающей элементарных возмущений может, таким образом, рассматриваться как задача о нахождении фронта ударной,

баллистической волны. Мы приведем еще рациональное, аналитическое решение этой задачи. Уравнение (3.137) в общем случае трансцендентно относительно R , поэтому прямое его решение может оказаться весьма затруднительным. Целесообразно искать кривые сечения поверхности фронта с какой-нибудь координатной плоскостью в параметрическом виде, выбирая R в качестве параметра. В самом деле, уравнение (3.137) — квадратное относительно x, y, z , а уравнение (3.138) всегда линейно относительно этих же переменных. Взяв какое-нибудь сечение искомой поверхности с плоскостью, например $z=z'$, мы можем выразить из (3.138) y в функции x, z', R и, подставляя в (3.137), получим квадратное уравнение для x . Его корни будут:

$$x = X_1(R, z'), \quad x = X_2(R, z'). \quad (3.140)$$

Подставив эти значения в (3.138), получим:

$$y = Y_1(z', R), \quad y = Y_2(z', R). \quad (3.140')$$

Уравнения $x=X_1, y=Y_1$ и $x=X_2, y=Y_2$ и дают кривую сечения фронта ударной волны плоскостью $z=z'$ в параметрическом виде.

Если источник возник в момент времени $t=0$, то значения параметра R для момента t лежат в интервале

$$0 \leq R \leq ct.$$

Сам момент возникновения является источником особого возмущения, которое, распространяясь от точки возникновения источника ($X(0), Y(0), Z(0)$) в виде сферической волны, дает дополнительную сферическую поверхность фронта, не являющегося, вообще говоря, поверхностью разрыва. При дозвуковой скорости движения источника фронт волны целиком образован этим шаром, имеющим центр в точке возникновения источника (рис. 27, а). Примером такой волны является волна, возникающая в момент вылета снаряда из ствола орудия (звук выстрела).

Эту волну называют «дульной», в отличие от баллистической, движущейся вместе со снарядом. На рис. 29 изображены дульная и баллистическая волны для равномерно ускоренного движения источника, начинающегося в точке O в момент $t=0$. По проведенным графикам для

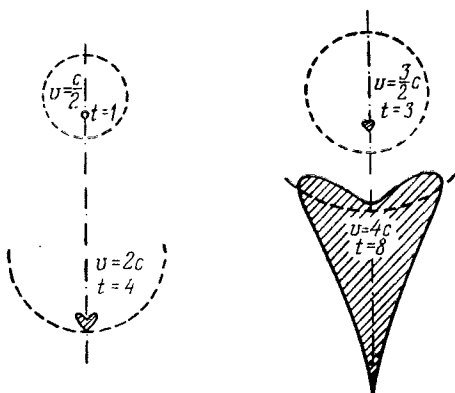


Рис. 29.

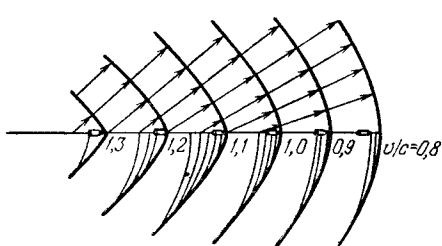


Рис. 30.

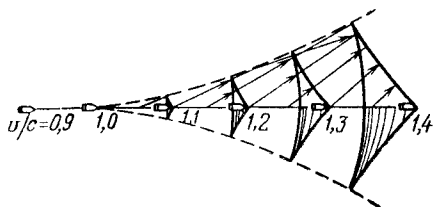


Рис. 31.

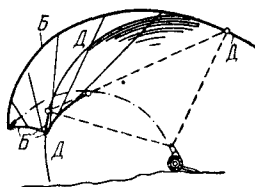


Рис. 32.

$t=1, 3, 4, 8$ читатель может проследить развитие баллистической волны, догоняющей, в этом примере, волну дульную. Заштрихованные области суть области, где имеются две эффективные позиции источника звука и, следовательно, должно быть слышно наложение двух звуковых полей: одного, исходящего со стороны источника звука, а другого — с противоположной стороны (ср. позиции Q'' , Q' , Q и P на рис. 23).

На рис. 30 и 31 показано развитие баллистической волны арснаряда для равномерно замедленного (рис. 30) и равномерно ускоренного (рис. 31) движений ¹⁾. Рис. 32 показывает баллистическую (B) и дульную (D) волну для ускоренного и криволинейного движения источника возмущений.

¹⁾ Рисунки 30, 31 и 32 заимствованы из доклада Л. Прандтля [39], рис. 28 — из книги Э. Эксклагона [40].

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА ПОТОКОМ

§ 22. Общие сведения о вихревом звуке и вихреобразовании

Наиболее распространенной причиной возникновения звука в среде является периодическое движение тел, погруженных в эту среду, и имеющее достаточно большую, частоту, например колебания ножки камертона, вращательное движение лопастей самолетного или корабельного винта и т. п. Однако звук возникает не только в этих случаях. Он возникает также при обтекании неподвижных твердых тел постоянным потоком (или, что все равно, при движении тел с постоянной скоростью), когда, казалось бы, нет причины для возникновения периодических явлений. Примером такого вида звукообразования может служить свист на растяжках самолетов, на снастях кораблей, звучание проводов и струн («эолова арфа»), свисты при обтекании углов, щелей и т. п. При этом существенно, что способность той же, скажем, струны колебаться играет второстепенную роль, так как указанные звуки возникают и при обтекании неподатливых, твердых тел. Исходные причины звукообразования в этих случаях не связаны с колебаниями тел, а обусловлены явлениями вихреобразования при обтекании тел потоком. Соответствующий звук называют поэтому вихревым.

При рассмотрении звука винта самолета мы уже указывали на двоякое происхождение этого звука. С одной стороны, звук винта вызывается периодическим движением лопастей (звук вращения); с другой стороны, имеет место обтекание лопастей винта потоком, ведущее к вихреобразованию, а вместе с тем и к возникновению особого, вихревого, звука. Мы остановимся теперь подробнее на основных закономерностях вихреобразования при обтекании тел. Как бы ни была мала вязкость среды, обтекающей тела, именно существование обвязанных ей сил тре-

ния приводит к образованию вихрей в первоначально потенциальном потоке.

Чтобы пояснить эту сторону дела, обратимся к уравнениям движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье—Стокса). Согласно (1.13), полагая там $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, получаем:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.1)$$

Пусть дело идет об обтекании тела, характерный размер которого есть d , и скорость набегающего потока пусть будет v . Введем вместо x, y, z, t безразмерные переменные

$$x' = x/d, \quad y' = y/d, \quad z' = z/d, \quad \tau' = tv/d$$

и положим $p = p' \rho v^2$, $\mathbf{v} = v \mathbf{v}'$. Тогда уравнение (4.1) приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \tau'} + (\mathbf{v}', \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' p' + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta' \mathbf{v}', \quad (4.1')$$

где Re есть число Рейнольдса:

$$\operatorname{Re} = vd/\nu \quad (4.2)$$

($\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость).

Из приведенного таким образом к безразмерному виду уравнения гидродинамики видно, что при больших числах Re последний член в (4.1) может быть отброшен, и, следовательно, в этом случае вязкие напряжения играют исчезающе малую роль в сравнении с эффектами, обусловленными инерцией жидкости. Мы получаем уравнения движения идеальной жидкости. Поэтому если набегающий поток был потенциальным, то таким он должен был бы и остаться. Однако это заключение справедливо лишь вдали от тела и неверно в непосредственной близости от него и позади него. Скорость v на самой поверхности тела в силу прилипания жидкости равна нулю. Вдали от поверхности она принимает значение, близкое к скорости набегающего потока ($v' = 1$). Это изменение скорости происходит в тонком слое, который называют пограничным слоем¹⁾. Толщину этого слоя δ можно оценить из

¹⁾ Подробности о пограничном слое и вихрях см. [41, 42].

того соображения, что в этом слое действие вязких напряжений сравнимо с значением эффекта, вызываемого инерцией. А это значит, что в этом слое последний член в (4.1) сравним с остальными. Эти последние имеют порядок 1. Так как в пограничном слое скорость на протяжении его толщины меняется от 0 до 1, то величина производной $\partial^2 v / \partial n^2$, где n — нормаль к поверхности тела, будет порядка v / δ^2 , и в безразмерном виде величина

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

(s — касательная длина) будет

$$\Delta' v' = \frac{l^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial n'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial s'^2} \approx \frac{l^2}{\delta^2}$$

(вместо $\Delta' v' = l^2 / l^2 = 1$ вне пограничного слоя). Отсюда мы заключаем, что в пограничном слое

$$\frac{1}{Re} \frac{l^2}{\delta^2} \approx 1, \text{ т. е. } \delta = \frac{l}{\sqrt{Re}}. \quad (4.3)$$

Вне этого тонкого слоя течение можно считать соответствующим потенциальному течению идеальной жидкости. Существование пограничного слоя, как бы ни был он тонок (большое Re , малая вязкость), приводит к существенным изменениям течения позади тела. На рис. 33, *a* изображено потенциальное обтекание цилиндра, а на рис. 33, *б* — обтекание, как оно получается на самом деле. Тонкий граничный слой $b'b''$ становится в точках b'' неустойчивым и порождает отделяющиеся от тела вихри.

Образование этих вихрей может быть понято следующим образом. Рассмотрим струю $a'a''a'''$ потенциального потока вблизи поверхности тела. В области $a'a''$ струя движется ускоренно, давление в a'' падает, что непосредственно вытекает из закона Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \quad (4.4)$$

из-за сжатия струи в области a'' . Напротив, в области $a''a'''$ струя движется против возрастающего давления и в силу этого замедляется. В идеальном случае абсолютно невязкой жидкости частицы жидкости благополучно пре-

одолевают этот подъем давления, превращая накопленную кинетическую энергию в потенциальную. При наличии же трения часть кинетической энергии расходуется на преодоление сил трения, и запас кинетической энергии частиц оказывается уже недостаточным для преодоления нарастающего давления. В результате в этой области возникает обратное течение. Точка возникновения такого течения (b'') называется точкой отрыва пограничного слоя. Картина возникающих здесь течений изображена подробнее на рис. 34. Это обратное течение и образует

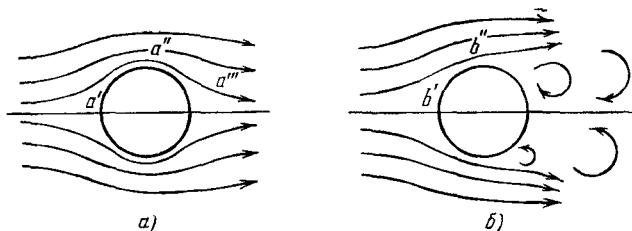


Рис. 33.

постепенно нарастающий, примерно до размеров тела, вихрь, который в конце концов отрывается от тела (рис. 33). То же имеет место и на нижней точке отрыва.

Но развитие вихря с одной стороны препятствует развитию с другой. Поэтому развитие вихрей и их отрыв происходят поочередно то с одной, то с другой стороны тела. Отрывающиеся вихри образуют позади тела двойную цепочку вихрей, постепенно рассеивающихся. Эта двойная цепочка вихрей носит название дорожки Кармана. Теорию этой дорожки мы рассмотрим ниже. Сейчас ограничимся указанием на то, что математический расчет периодического отрыва вихрей пока никому не удался. Численными методами Больтце [43] удалось показать математически развитие вихря за точкой отрыва.

На рис. 35 и 36 показаны фотографии развивающегося при обтекании цилиндра вихря, а также дорожка Кармана, образующаяся позади цилиндра при $Re=250$.

Не имея возможности математически рассчитать частоту срыва вихрей, мы можем все же сделать важные выводы из соображений размерности. Из величин, харак-

теризующих поток, обтекающий тело: v — скорость потока, d — размер тела, ν — кинематическая вязкость, мы можем образовать две величины f и f' , имеющие размерность частоты:

$$f = \kappa (Re) \frac{v}{d}, \quad (4.5)$$

$$f' = \kappa' (Re) \frac{\nu}{d^2}, \quad (4.5')$$

где κ и κ' — безразмерные коэффициенты, зависящие от числа Рейнольдса. Первая из частот является характерной частотой возможных периодических движений жидкости при больших значениях числа Re , когда преобладает влияние эффектов инерции жидкости; вторая, напротив, имеет значение при преобладании вязкости (малые Re). Вихри возникают только при больших числах

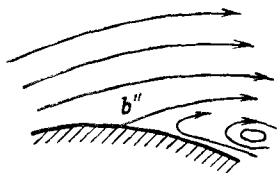


Рис. 34.

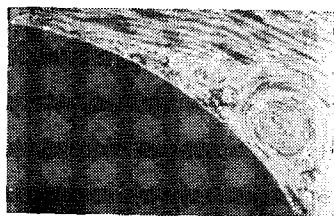


Рис. 35.



Рис. 36.

Re , поэтому следует ожидать, что частота срыва вихрей должна определяться формулой (4.5). Может показаться странным, что частота вихрей, возникающих исключительно благодаря вязкости жидкости, определяется формулой (4.5), а не (4.5'). Однако эта парадоксальность только кажущаяся. Если бы желали воспользоваться формулой (4.5') для определения частоты срыва вихрей, то под величиной d следовало бы иметь в виду не размеры тела, а толщину пограничного слоя δ . Подставляя δ из (4.3) в (4.5'), мы получим для f' результат, совпадаю-

щий с (4.5). Заметим, что формулы (4.5) и (4.5'), конечно, различаются лишь постольку, поскольку в обоих случаях κ и κ' мало зависят от Re . Это на самом деле и наблюдается на опыте. Периодический срыв вихрей с частотой (4.5) порождает периодические импульсы малых сжатий и разрежений, которые и распространяются вдали от тела в виде звуковой волны, частота которой совпадает с f . Эту волну мы и называем вихревым звуком.

Впервые частота вихревого звука была исследована Струхалем на примере звучания струны в потоке воздуха (так называемая «золова арфа»). Струхаль вывел из своих опытов как раз формулу (4.7) с $\kappa(Re) = 0,185$ ¹⁾. Значение коэффициента Струхалья зависит от формы тела, от выбора характерного размера тела d и не сильно (в определенном интервале чисел Re) от числа Re . Для шара и цилиндра под d разумеют их диаметры. Для пластинки, имеющей ширину l и толщину b , стоящей под углом атаки α к потоку,

$$d = l \sin \alpha + b \cos \alpha.$$

При таком определении d имеем по опытным данным [33, 45]:

для цилиндра: $\kappa = 0,20$ в области $10^3 < Re < 3 \cdot 10^4$;
 для пластинки: $\kappa = 0,165 - 0,180$ для $10^3 < Re < 1,8 \times 10^5$ (при угле атаки от 20 до 90°).

Значения κ , получаемые различными авторами, мало отличаются друг от друга. Более детальное исследование спектра вихревого звука [45] показывает, что формула Струхалья (4.5) должна быть обобщена, чтобы учесть обертоны основной частоты:

$$f_n = \kappa(Re) \frac{v}{d} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

Эти обертоны хотя и слабо выражены, но все же наблю-

¹⁾ Этот вывод Струхалья оспаривался с той точки зрения, что исследуемая струна сама способна к колебаниям и подстраивалась им при каждой скорости потока на максимум звучания. Однако более поздние исследования (см., например, [45, 46]) подтвердили справедливость формулы Струхалья для неподатливых тел, когда колебания обусловлены исключительно вихрями.

даемы ¹⁾ (рис. 37) ²⁾. Что касается интенсивности звука Струхаля, то она исследовалась значительно менее подробно. По наблюдениям В. Холле [46] для обтекания тонких цилиндров (диаметр d , длина l) интенсивность вихревого звука на расстоянии r от излучателя равна

$$I = \alpha \frac{l d v^n}{r^2}, \quad (4.7)$$

где В. Холле принимает для n значение 7 (вообще по его опытам $6 < n < 8$) и $\alpha = 5 \cdot 10^{-24}$ СГС. По наблюдениям

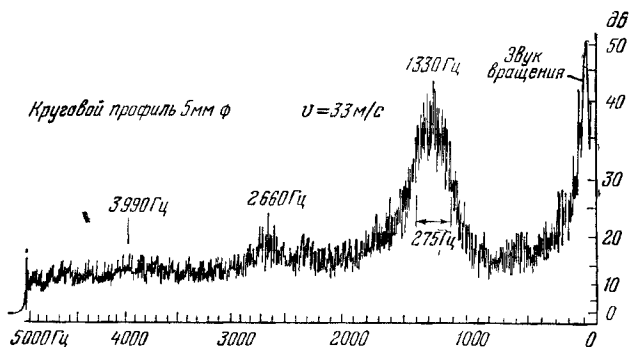


Рис. 37.

Е. Я. Юдина [47] над интенсивностью вихревого шума вентилятора получается $n=6$. К такому же результату для n пришел и Ю. М. Сухаревский из наблюдений вихревого шума в аэродинамической трубе (Физический институт АН СССР, неопубликованный отчет). Е. Непомнящий [33] из измерений над вихревым шумом винта (рис. 38) приходит к $n=4$, что соответствует теоретической кривой $40 \lg v$ (рис. 38). На самом деле, по крайней мере для больших углов атаки ($\alpha > 20^\circ$) кривая $60 \lg v$, соответствующая $n=6$, лучше соответствует результатам его измерений.

¹⁾ При больших числах Рейнольдса ($Re > 10^6$) выраженной вихревой частоты, по-видимому, вообще не существует. Спектр вихревого звука становится практически непрерывным, и частота Струхаля (4.5) становится лишь подходящей мерой для представленных в таком спектре частот.

²⁾ Рис. 37 взят из статьи Холле [46].

Что касается до направленности вихревого звука, то наблюдения Е. Я. Юдина [47] показывают, что она совпадает с направленностью диполя, ось которого перпендикулярна к направлению потока, обтекающего тело (например, винт излучает вихревой шум преимущественно в направлении своей оси, симметрично вперед и назад). На рис. 39 приведен график направленности вихревого шума винта.

К теоретическому толкованию этих закономерностей мы вернемся позднее. Сейчас мы хотели бы отметить то

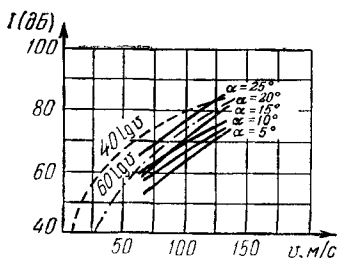


Рис. 38.

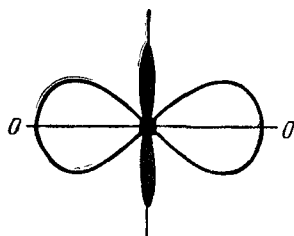


Рис. 39.

обстоятельство, что высокая степень зависимости интенсивности вихревого звука от скорости потока ($n \geq 6$) часто казалась парадоксальной, так как из размерности величин считали, что поскольку интенсивность звука пропорциональна квадрату давления, а мерой давления является величина $\rho v^2/2$, то n должно быть равно 4. Ошибка этого рассуждения основана на том, что величина $\rho v^2/2$ является мерой давления лишь в несжимаемой жидкости. В волновой зоне, вдали от тела, это давление, как убывающее обратно квадрату расстояния, практически равно нулю, важная же часть давления, убывающая обратно первой степени расстояния, целиком связана с наличием сжимаемости газа или жидкости. Вообще из соображений размерности мы можем сделать относительно n заключение, что $n > 4$. В самом деле, плотность потока звуковой энергии равна

$$I = \pi^2 / \rho s, \quad (4.8)$$

где π — давление в волне, ρ — плотность среды, s — скорость

звука. Если измерять π в единицах $\rho v^3/2$, то

$$I = \chi \frac{\rho v^4}{c}, \quad (4.9)$$

где безразмерный коэффициент χ может зависеть от числа Re, от числа Маха $= v/c$, от l/r , где l — какой-нибудь размер тела, и от углов наблюдения ϑ , φ . Так как при больших r в силу закона сохранения энергии I должно быть обратно пропорционально квадрату расстояния, то при $r \rightarrow \infty$ имеем:

$$\chi\left(\frac{l}{r}, \text{Re}, \frac{v}{c}, \vartheta, \varphi\right) = \frac{l^2}{r^2} \chi'\left(\text{Re}, \frac{v}{c}, \vartheta, \varphi\right). \quad (4.10)$$

Вместо l^2 , конечно, можно взять произведение ld . Далее, в отсутствие сжимаемости ($c \rightarrow \infty$) $\chi' = 0$ (так как звук в отсутствие сжимаемости не излучается). Поэтому χ' должно быть пропорционально некоторой положительной степени числа Маха (v/c) . Таким образом, мы получаем:

$$I = \alpha \frac{ld \rho v^4}{r^2 c} \left(\frac{v}{c}\right)^s, \quad (4.11)$$

где α зависит от Re и углов ϑ , φ , а $s > 0$. Зависимость α от числа Re в той области, где сопротивление тела мало зависит от Re, должна быть слабой, так что фактически α зависит лишь от углов и определяет направленность звука.

Дополнительные рассуждения позволяют определить и наименьшее значение s . Наш источник звука, а priori, может быть источником нулевого порядка (α не зависит от ϑ , φ), диполем ($\alpha = \alpha' \cos^2 \vartheta$, причем мы не можем указать направление оси диполя, $\vartheta = 0$) и т. д. Теперь мы покажем, что нулевой источник должен быть исключен. В самом деле, мощность нулевого источника Q равна объемной скорости:

$$Q = \int_{(S)} v_n dS,$$

где интеграл взят по поверхности S , охватывающей наш источник вблизи самого источника, и v_n есть нормальная компонента скорости жидкости к избранной поверхности S . В этой области жидкость можно считать несжимаемой,

так как длина волны λ вихревого звука

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{\kappa} \frac{c}{v} d$$

(при $v < c$, к тому же $\kappa < 1$) всегда много больше размера тела. Но для несжимаемой жидкости поток через замкнутую поверхность равен нулю. В силу этого $Q=0$ ¹⁾.

Таким образом, следует ожидать дипольного излучения²⁾. Так как его мощность также пропорциональна скорости потока v , а интенсивность излучения дипольного источника пропорциональна квадрату его мощности (т. е. v^2) и четвертой степени частоты ($f^4 \sim v^4$), то мы получаем, что показатель s в (4.11) должен быть равен 2, т. е.

$$I = \alpha' (\text{Re}) \cos^2 \vartheta \frac{ld}{r^2} \frac{\rho v^6}{c^3}. \quad (4.11')$$

Величина коэффициента α' , конечно, не может быть определена из соображений размерности. Что касается направления оси диполя ($\vartheta=0$), то, по крайней мере для симметричных тел, может быть высказана догадка, основанная на симметричном чередовании срывов вихрей с верхней линии отрыва и с нижней, что ось диполя направлена по линии, перпендикулярной к потоку (ср. § 25).

§ 23. Теория вихревой дорожки Кармана.

Вычисление частоты вихреобразования

Карману и Рубаху [48, 49] удалось построить теорию двойной цепочки вихрей, представляющей идеализацию той вихревой дорожки, которая на самом деле возникает позади обтекаемых потоком тел (ср. рис. 36). Теория

¹⁾ Возможное возражение против этого заключения сводится к тому, что для излучения звука как раз существенна сжимаемость, при учете которой $Q \neq 0$. Но учет сжимаемости означает разложение по степеням v^2/c^2 , поэтому с учетом сжимаемости Q было бы пропорционально $v \frac{v^2}{c^2}$, а квадрат Q пропорционален $v^2 \frac{v^4}{c^4}$. Так как интенсивность нулевого источника еще пропорциональна $f^2 \sim v^2$, то мы получили бы $I \sim v^8$, т. е. следующий за (4.11) член в разложении по степеням v/c .

²⁾ К тому же выводу пришел Е. Я. Юдин на основе своих измерений направленности вихревого шума вентиляторов.

Кармана — Рубаха относится к обтеканию бесконечных цилиндров и пластинок, так что рассматривается лишь плоское течение, в плоскости (x, y) , совпадающей с плоскостью поперечного сечения обтекаемого тела. Вдоль оси, параллельной образующим цилиндра или пластинки, течение предполагается неизменным.

Плоское течение идеальной, несжимаемой жидкости, как известно, может быть описано комплексным *потенциалом скоростей* $\Phi(z)$, $z = x + iy$ ¹⁾. Компоненты скорости v по осям Ox и Oy , v_x и v_y , вычисляются из этого потенциала по формуле

$$v_x - iv_y = -\frac{d\Phi}{dz}. \quad (4.12)$$

Компонента же по третьей оси, в силу предположения о плоском характере течения, равна нулю. Зная Φ , можно найти также и давление p . Причем если Φ зависит от времени, то p вычисляется по обобщенной формуле Бернулли:

$$p = p_0 + \rho \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\rho}{2} \left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2; \quad \left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2 = v_x^2 + v_y^2 = v^2. \quad (4.13)$$

¹⁾ Если $\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t)$ есть аналитическая функция z , то φ и ψ удовлетворяют уравнениям Лапласа $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\psi = 0$, причем производные φ и ψ подчиняются условиям Коши—Римана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Если φ принять за потенциал скоростей, то уравнение $\psi = \text{const}$ будет давать линии тока, ортогональные к поверхностям $\varphi = \text{const}$. Скорости v_x, v_y суть $-\partial\varphi/\partial x$ и $-\partial\varphi/\partial y$. В силу условий Коши—Римана имеем:

$$-\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_x - iv_y,$$

что и дает (4.12). Уравнение (4.13), если выразить Φ через φ , гласит:

$$p = p_0 + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2},$$

что совпадает с (1.29). Подробности о комплексном потенциале см. в любом курсе гидродинамики.

Здесь $\text{Re}(\partial\Phi/\partial t)$ означает действительную часть от $\partial\Phi/\partial t$.

Комплексный потенциал одной вихревой нити, расположенной в точке $z=z_k$, будет

$$\Phi_k(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\pi(z - z_k)}{l}, \quad (4.14)$$

где Γ — циркуляция скорости, а l — любая длина. Простое вычисление скоростей v_x и v_y из этого потенциала дает течение вокруг точки $z=z_k$, приведенное на рис. 40. Причем величина скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ изменяется с расстоянием r от оси такого цилиндрического вихря по закону

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

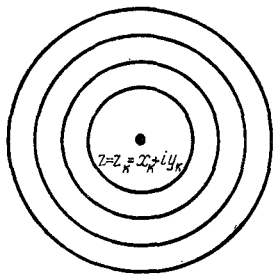


Рис. 40.

подобно тому, как меняется магнитное поле около бесконечно длинного цилиндрического провода.

Если у нас имеется несколько вихрей, расположенных в различных точках $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$, ..., $z_k(x_k, y_k)$, то полный потенциал Φ получится суммированием всех Φ_k . Рассмотрим потенциал Φ' бесконечного ряда вихрей, имеющих циркуляцию Γ' и находящихся на расстоянии l друг от друга. На рис. 41 приведено два таких ряда вихрей. Вихри верхнего ряда расположены в точках $z'_k = x'_k + iy'_k$, причем $x'_k = lk$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y'_k = h/2$. Так как потенциал Φ определяется лишь с точностью до постоянной, то в формуле (4.14) под знаком логарифма можно делить на любое число, так что сумму Φ_k можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= \frac{\Gamma'}{2\pi i} \left\{ \ln \frac{(z - z'_0)\pi}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left(\frac{z - z'_k}{-lk} \right) + \ln \left(\frac{z - z''_k}{lk} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\Gamma'}{2\pi i} \ln \left\{ \frac{(z - z'_0)\pi}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z - z'_0}{lk} \right)^2 \right) \right\}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

где $z'_k = z'_0 + lk$, $z''_k = z'_0 - lk$, и в силу известного представления функции $\sin(\pi z)$

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2}\right) \quad (4.16)$$

получаем:

$$\Phi' = \frac{\Gamma'}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l} (z - z'_0). \quad (4.17)$$

Подобным же образом для второй цепочки получаем:

$$\Phi'' = \frac{\Gamma''}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l} (z - z''_0). \quad (4.18)$$

Найдем теперь скорость движения вихревых цепочек. Легко видеть, что одна цепочка не может двигаться.

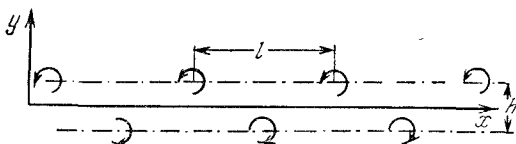


Рис. 41.

В самом деле, все вихри находятся в одинаковых условиях, и для вычисления скорости движения цепочки достаточно вычислить скорость любого из вихрей. Последняя равна результирующей от всех вихрей, кроме рассматриваемого, так как одна вихревая нить не дает сама по себе поступательной скорости. В силу же симметрии очевидно, что вихри, расположенные по правую и по левую сторону от рассматриваемого вихря, сообщают ему равные, но противоположные скорости (это легко проверить по формуле $v = -d\Phi'/dz$, если выкинуть из (4.17) потенциал рассматриваемого вихря). При наличии двух цепочек дело меняется. В этом случае суммарный потенциал равен:

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = \frac{\Gamma'}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l} (z - z'_0) + \frac{\Gamma''}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l} (z - z''_0), \quad (4.19)$$

а комплексная скорость будет:

$$v_x - iv_y = -\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{\Gamma'}{2il} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z'_0) - \frac{\Gamma''}{2il} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z''_0). \quad (4.20)$$

Вихри каждой из цепочек будут двигаться одинаково, но так как сама цепочка себя не двигает, то первая цепочка будет перемещаться лишь под влиянием второй, а вторая — лишь под влиянием первой. Поэтому мы получаем скорость первой цепочки, если вычислим скорость, создаваемую второй цепочкой в точке нахождения какого-нибудь вихря первой (например, $z = z'_0$). Таким образом, скорость первой цепочки будет

$$V'_x - iV'_y = -\frac{\Gamma''}{2il} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z'_0 - z''_0) \quad (4.21)$$

и второй

$$V''_x - iV''_y = \frac{\Gamma'}{2il} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z'_0 - z''_0). \quad (4.22)$$

Чтобы цепочки двигались без изменения их относительной конфигурации, необходимо, чтобы

$$V'_x - iV'_y = V''_x - iV''_y, \quad (4.23)$$

т. е. $\Gamma'' = -\Gamma'$. Если мы хотим, чтобы направление циркуляций соответствовало изображенному на рис. 41, то следует взять $\Gamma'' = \Gamma > 0$. Полагая далее, что цепочки движутся параллельно самим себе, мы должны потребовать $V'_y = V''_y = 0$. Это условие позволяет определить величину сдвига вихрей одной цепочки по сравнению с вихрями другой. Обозначая этот сдвиг через b , а расстояние между цепочками через h (см. рис. 41), мы получим, что $z'_0 - z''_0 = b + ih$. Чтобы определить b , нужно приравнять нулю V'_y , т. е. мнимую часть (4.21) или (4.22). Для этого следует воспользоваться формулой

$$\operatorname{ctg} (X + iY) = \frac{\sin 2X}{\operatorname{ch} 2Y - \cos 2X} - i \frac{\operatorname{sh} 2Y}{\operatorname{ch} 2Y - \cos 2X}, \quad (4.24)$$

где

$$\operatorname{ch} \xi = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}, \quad \operatorname{sh} \xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}, \quad \operatorname{th} \xi = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi}.$$

После простых выкладок из условия $V'_y = V''_y = 0$ находим

$$\sin(2\pi b/l) = 0, \quad (4.25)$$

т. е. $b=0$ или $b=l/2$. В первом случае вихри обоих рядов находятся друг над другом, во втором они расположены в шахматном порядке, как показано на рис. 41. Карман и Рубах [48, 49] показали, что первое расположение ($b=0$) неустойчиво, а второе, шахматное ($b=l/2$), устойчиво для широкого класса возмущений, если

$$\operatorname{ch}(\pi h/l) = \sqrt{2}, \text{ т. е. } h/l = 0,28. \quad (4.25')$$

Этим определяется отношение h/l . Получающаяся картина расположения и движения вихрей весьма близко соответствует наблюдающейся на опыте при обтекании цилиндров и пластинок (ср. рис. 36). В частности, опыт подтверждает приведенное значение соотношения h/l .

Вычисляя действительную часть V'_x комплексной скорости $V'_x - iV''_y$ (4.21) при $b=l/2$, мы найдем скорость движения вихревой дорожки:

$$u = V'_x = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th}\left(\frac{\pi h}{l}\right) = \frac{\Gamma}{2\sqrt{2}l}. \quad (4.26)$$

С помощью закона сохранения импульса, в применении его к набегающему потоку, к телу и к вихревой дорожке, оставляемой позади тела, Карману и Рубаху ([48], см. также цитированную выше «Гидромеханику» Кочина, Кибеля и Розе) удалось установить связь между коэффициентом лобового сопротивления тела C_w и отношениями l/d и u/v , где d — диаметр цилиндра или ширина пластинки, а v — скорость тела. При этом они отождествляют дорожку, возникающую позади тела, с только что рассмотренной нами бесконечной дорожкой вихрей (рис. 42). Согласие с опытом получается очень хорошее и иллюстрируется следующей таблицей:

Тело	u/v	l/d	h/l		C_w	
			теор.	опыт	теор.	опыт
Цилиндр	0,14	4,3	0,28	0,28	0,91	0,90
Пластинка	0,20	5,6	0,28	0,30	1,61	1,56

Определяемое из этой таблицы отношение u/v позволяет также вычислить коэффициент Струхала κ в формуле (4.5) для частоты вихревого звука для цилиндра и пластинки. Действительно, в системе координат, в которой тело покоится, дорожка вихрей движется со скоростью, по абсолютной величине равной $(v-u)$, в направлении, противоположном движению тела (рис. 42). Когда дорожка сместится на l , то вся картина движения вихрей повторится. Поэтому период движения есть $T=l/(v-u)$,

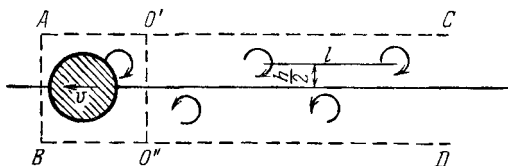


Рис. 42.

а частота (основная) будет $f=(v-u)/l$. За каждый промежуток времени T позади тела возникает новая, вполне развившаяся пара вихрей. Так как вихревой звук порождается как раз этими вихрями, то частота вихревого звука должна быть равна:

$$f = \frac{v-u}{l} = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \frac{d}{l} \frac{v}{d}, \quad (4.27)$$

откуда

$$\kappa = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \frac{d}{l}. \quad (4.28)$$

Подставляя сюда значения u/v и l/d из приведенной таблицы, получаем $\kappa=0,20$ (для цилиндра) и $\kappa=0,14$ (для пластинки), что находится в очень хорошем согласии с экспериментальными данными, приведенными на стр. 132. Таким образом, теория Кармана и Рубаха связывает между собой расчет лобового сопротивления тела с расчетом частоты образования вихрей, возникающих позади тела.

§ 24. Псевдозвук. Условия излучения звука потоком

В практике часто приходится иметь дело с приемом звука в условиях, когда приемник погружен в нестационарный поток, т. е. в поток, давление и скорость в котором меняются не только в пространстве, но и во времени. Примером таких потоков может служить ветер, который является турбулентным потоком, обладающим некоторой средней скоростью, струя кильватерной воды, вырывающаяся позади корабля или с какой-либо выдающейся детали его корпуса, и т. п. Идеализацией такой кильватерной струи является как раз вихревая дорожка Кармана, которая движется со скоростью $u = \Gamma / 2\sqrt{2} l$ так, что давление и скорость потока в каждой точке меняются во времени с периодом $T = l/u$. Обычно вызываемые этими изменениями давления и скорости пульсации давления в приемнике звука рассматривают как акустические помехи. С этой точки зрения мы рассмотрим дело позднее, в главе о ветрозащите приемников. Сейчас же мы будем ставить вопрос так, как если бы мы специально интересовались теми звуками, которые возбуждаются таким потоком в приемнике.

Если частота этих пульсаций достаточно велика, то в таком нестационарном потоке приемник давления будет «слышать» звук (или шум, смотря по спектральному составу этих пульсаций). При этом мы совсем оставляем в стороне те дополнительные звуки, которые могут возникнуть из-за вихреобразования на самом приемнике звука, считая приемник в этом отношении идеальным. Действие пульсаций, существующих в потоке (на приемник), может быть неотличимо от действия звука подходящего спектрального состава. В обоих случаях приемник будет констатировать звук. Однако звуковые колебания среды и пульсации нестационарного потока физически глубоко различны. В первом случае речь идет о малых изменениях состояния среды, связанных с ее сжимаемостью. Звуковые колебания распространяются со скоростью звука, и эта скорость определяется упругостью среды ($c^2 = dp/d\rho$). В случае пульсаций в нестационарном потоке сжимаемость (если скорости в потоке много меньше скорости звука) играет совершенно второстепенную роль.

Движение жидкости можно считать совершенно несжимаемым, и все же пульсации давления и скорости могут иметь место и будут приниматься приемником как переменное давление. Скорость распространения этих пульсаций не имеет никакого отношения к скорости звука и равна средней скорости потока. Второе различие заключается в том, что звуковые волны подчиняются принципу суперпозиции (поскольку их можно считать линейными колебаниями среды), пульсации же скорости и давления в нестационарном потоке, представляющие сугубо нелинейное явление, разумеется, не подчиняются суперпозиции. Эти физические различия заставляют нас назвать звук, принимаемый приемником, погруженным в нестационарный поток, псевдозвуком.

Следует иметь в виду, что нестационарный поток может служить причиной возникновения обычного звука, распространяющегося со скоростью c . Примером этого может служить тот же вихревой звук, возникающий при обтекании тел. Условия порождения звука потоком мы рассмотрим ниже.

Сказанное здесь о звуке нестационарного потока легко может быть иллюстрировано на примере вихревой дорожки Кармана, которую можно рассматривать как одну из простейших схем нестационарного потока. Вычислим для этой цели скорости и давления в вихревой дорожке Кармана. Мы будем предполагать, что приемник давления покоится, так что расчет будем вести в системе координат, в которой вихревая дорожка движется со скоростью $u = \Gamma/2\sqrt{2}l$. В этой системе координат координаты z'_0 и z''_0 [(ср. (4.17), (4.18) и (4.19)], отличающие положения вихрей первой и второй дорожки, будут функциями времени:

$$z'_0 = ut + i\frac{h}{2}, \quad z''_0 = ut - i\frac{h}{2}. \quad (4.29)$$

Из (4.19) и (4.20) следует:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z'_0} u + \frac{\partial \Phi}{\partial z''_0} u = -u \frac{d\Phi}{dz} = u(v_x - iv_y). \quad (4.30)$$

Давление p на основании уравнения Бернулли (4.13) равно

$$p = p_0 + \rho u v_x - \rho \frac{v^2}{2}. \quad (4.31)$$

Далее, из (4.20) при $\Gamma' = -\Gamma'' = -\Gamma$ находим:

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2il} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z'_0) - \frac{\Gamma}{2il} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z''_0). \quad (4.32)$$

Пользуясь формулой (4.24) для определения действительной и мнимой части, получим из (4.32) и (4.29):

$$v_x = \frac{\Gamma}{2l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) + \cos \frac{2\pi}{l} (x - ut)} - \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} \left(y - \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \cos \frac{2\pi}{l} (x - ut)} \right\}, \quad (4.33)$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{2l} \sin \frac{2\pi}{l} (x - ut) \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) + \cos \frac{2\pi}{l} (x - ut)} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \cos \frac{2\pi}{l} (x - ut)} \right\}. \quad (4.33')$$

Ввиду громоздкости формул мы определим давление p для двух крайних случаев: а) на оси дорожки ($y=0$) и б) вне дорожки, для $y > l > h$. В первом случае из (4.31), (4.33) и (4.33'), учитывая, что $\Gamma/2l = \sqrt{2}u$ и $\operatorname{ch}(\pi h/l) = \sqrt{2}$, получаем:

$$p = p_0 + \frac{4\rho u^2}{1 - \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{l} (x - ut)}{\operatorname{ch}^2 (\pi h/l)}} \left\{ 1 - \frac{4 + 2 \sin^2 \frac{2\pi}{l} (x - ut)}{1 - \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{l} (x - ut)}{\operatorname{ch}^2 (\pi h/l)}} \right\}. \quad (4.34)$$

Отсюда видно, что амплитуда переменного давления на оси цепочки по порядку величины равна ρu^2 , а основная частота колебаний этого давления есть

$$\omega = \frac{4\pi u}{l} = 2\omega_0$$

($\omega_0 = 2\pi u/l$ — основная частота цепочки). Для больших y , пренебрегая членами порядка $[\exp(-2\pi y/l)]^2$ и выше, получаем:

$$p = p_0 - 4\rho u^2 \exp\left(-\frac{2\pi y}{l}\right) \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{l}(x - ut) + \dots \quad (4.35)$$

Как видно из формул (4.35), давление постепенно стремится к p_0 ; его амплитуда равна теперь $4\sqrt{2}\rho u^2 \exp(-2\pi y/l)$, а основная частота $\omega = \omega_0$. Спектр колебаний, как мы видим, существенно зависит от положения приемника в дорожке: в глубине дорожки преобладающая частота псевдозвука есть $2\omega_0$, а вне ее — ω_0 .

Следует заметить, что наш расчет давления относится к идеальному приемнику, не вносящему искажений в поток. Реальный приемник при помещении в поток неизбежно изменит его вблизи своего тела. Принимаемое приемником давление будет зависеть не только от того, что делается в самом потоке, но и от характера обтекания приемника. Поэтому необходимо учесть, как именно меняется распределение давлений в потоке при внесении туда приемника.

Так как расчет такого рода искажений практически неосуществим, то мы принуждены ограничиться оценками. Уравнения гидродинамики

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \right\} = -\nabla p \quad (4.36)$$

позволяют написать для давления формулу, справедливую по порядку величины:

$$p = \alpha \rho \frac{\delta v}{T} l + \beta \rho v \delta v + \text{const}, \quad (4.37)$$

где δv — величина пульсации скорости в потоке, T — период этих пульсаций, α и β — численные коэффициенты, а l — длина, определяющая градиенты (например, $\nabla p \sim \sim p/l$). Если линейный размер пульсаций есть Λ , то $T = \Lambda/v$. В самом потоке, очевидно, $l = \Lambda$, так что оба члена в (4.37) одного порядка (если только поток не близок к стационарному). Вблизи тела приемника характерная длина, определяющая градиенты, будет или опять-таки

Λ , или размер приемника d , если $d < \Lambda$. В первом случае ($d > \Lambda$) из (4.37) получим

$$p = (\alpha + \beta) \rho v \delta v, \quad (4.38)$$

во втором ($d \ll \Lambda$)

$$p = \left(\alpha \frac{d}{\Lambda} + \beta \right) \rho v \delta v \approx \beta \rho v \delta v. \quad (4.39)$$

Коэффициенты α , β зависят от характера потока и от формы тела приемника, поскольку речь идет о давлении вблизи приемника. Существенным выводом, важным для ветрозащиты приемника, является то, что в случае, когда размеры приемника гораздо меньше размеров пульсаций, приемник будет регистрировать изменения давления, обусловленные не местным ускорением $\partial v / \partial t$, а изменением аэродинамического напора $\rho v^2 / 2$, т. е. дело будет обстоять так, как оно получалось бы при медленном изменении скорости постоянного потока. Поэтому в этом случае позволительно рассматривать обтекание приемника постоянным потоком и, зная для такого потока распределение давлений на приемнике

$$p = \kappa \rho v^2 / 2 \quad (4.40)$$

(где κ зависит от точки поверхности приемника), определить переменное давление по формуле

$$\delta p = \kappa \rho v \delta v \quad (4.41)$$

(δv — пульсация скорости). В случае $d > \Lambda$ такое упрощенное «квазистационарное» рассмотрение уже невозможно. Подробнее эта сторона дела будет рассмотрена в § 29 и § 30.

Вычисленные нами пульсации давления, которые мы называли псевдозвуком, обусловлены движением несжимаемой жидкости. Сжимаемость можно было бы учесть как дальнейшую малую поправку порядка u^2/c^2 . Однако, спрашивается, может быть все же за этими малыми поправками и скрывается истинный звук, распространяющийся со свойственной ему скоростью c ? Ответ на этот вопрос должен быть дан отрицательный. Если наш приемник будет двигаться вместе с дорожкой, т. е. со скоростью u , то все величины станут постоянными. В такой системе

координат поток вихревой дорожки становится стационарным. Мы сейчас покажем, что если существует система координат, в которой поток стационарен, то такой поток не может излучать звука. Возможность приведения потока к стационарному виду означает, что все характеризующие поток величины зависят от времени только через комбинацию $x - ut$, так что, взяв новую систему, движущуюся со скоростью u ($x' = x - ut$), мы получим стационарное течение. Следовательно, потенциал скоростей Φ будет также функцией $(x - ut)$ (даже если мы учтем сжимаемость жидкости), т. е.

$$\Phi = \Phi(x - ut, y, z). \quad (4.42)$$

Разложим этот потенциал в систему цилиндрических волн, уходящих от потока:

$$\begin{aligned} \Phi(x - ut, y, z) = \\ = \int C(\alpha, \beta) \exp[i\alpha(x - ut)] H_0(\beta\rho) \beta d\beta d\alpha, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$ есть расстояние от оси потока, H_0 — функция Ганкеля, а α и β — параметры разложения. Каждая из отдельных цилиндрических волн

$$\Phi_{\alpha\beta}(x, \rho) = C e^{i\alpha(x - ut)} H_0(\beta\rho) \quad (4.44)$$

при больших ρ получает асимптотический вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}(x, \rho) = C \frac{\exp[i\alpha(x - ut) + i\beta\rho]}{\sqrt{\rho}} = \\ = \frac{C}{\sqrt{\rho}} \exp[i(\alpha x + \beta\rho) - i\omega t], \end{aligned} \quad (4.45)$$

где частота $\omega = \alpha u$. Но для звуковых волн фазовая скорость есть c , поэтому для этих волн

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \alpha^2 \frac{u^2}{c^2} \quad (4.46)$$

или

$$\beta^2 = \alpha^2 \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right). \quad (4.47)$$

Отсюда, если $u < c$, то β — мнимое, а, следовательно, колебания $\Phi_{\alpha\beta}$ экспоненциально затухают по мере удале-

ния от потока; иными словами, при скорости потока, меньшей скорости звука, звуковое поле в волновой зоне ($|\beta| \rho \gg 1$) равно нулю.

При сверхзвуковой скорости ($u > c$) равенство (4.47) возможно и для действительных β . Так как $\beta/\alpha = \operatorname{ctg} \epsilon$, где ϵ — угол между нормалью к волне и скоростью потока, то при $u > c$ находим из (4.47):

$$\sin \epsilon = c/u, \quad (4.48)$$

т. е. излучение возможно лишь под углом Маха. Этот результат уже был получен ранее, но иным путем (ср. § 20). Отсюда мы видим, что поток, движущийся с дозвуковой скоростью, может излучать лишь в том случае, если он ни в какой системе координат не может быть сделан стационарным. Как частный случай отсюда следует, что бесконечная вихревая дорожка Кармана не может излучать звука. Все ее поле, даже и в случае больших частот u/l , будет псевдозвуковое.

§ 25. Вихревой звук при обтекании длинного цилиндра или пластинки

Мы рассмотрим теперь подробнее возникновение вихревого звука при обтекании тела простой формы — цилиндра или пластинки. На рис. 42 изображены сечение рассматриваемого цилиндра и вихревая дорожка, получающаяся позади него. Возьмем систему координат ξ, η, ζ , в которой тело покоится, а воздух движется со скоростью v по направлению оси $O\xi$. Если в неподвижной системе координат скорость вихрей в дорожке есть u , то в избранной нами системе координат эта скорость есть $V = v - u$ (ср. § 23). Непрерывное существование дорожки Кармана поддерживается периодически срывом вихревых нитей с кромок обтекаемого тела. Если период дорожки обозначить, как и раньше, через l , то частота срывов вихрей, как это мы уже объясняли в § 23 [ср. (4.27)], равна:

$$f = \frac{v - u}{l} = \kappa \frac{v}{d}. \quad (4.49)$$

На расстоянии примерно $l/2$ от тела образовавшиеся вихри вступают в регулярную дорожку Кармана и движутся

далее равномерно со скоростью $V=v-u$. Следовательно, состояние потока в этой области ($\xi > l/2$) будет зависеть от времени через комбинацию $\xi-Vt$, и согласно изложенному в § 24 эта часть потока не будет излучать звука. Таким образом, возникновение вихревого звука целиком обусловлено периодическим рождением вихрей около обтекаемого тела (область слева от $O'O''$ на рис. 42). Мы уже показали ранее (§ 22), что длина волны вихревого звука $\lambda = \frac{1}{\alpha} \frac{c}{v} d$ много больше размеров тела d . Благодаря этому обстоятельству около тела можно очертить такую область, в которой движение жидкости можно считать несжимаемым, и все же настолько от него далекую, что в ней можно считать справедливым линейное уравнение для потенциала φ , рассмотренное нами в § 6 [см. (1.94)]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \xi^*} = 0, \quad (4.50)$$

где

$$\xi^* = \frac{\xi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \xi = x - vt, \quad \beta = v/c.$$

Линейность явлений достигается в той области, где вторым членом формулы Бернулли

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{(\nabla \varphi)^2}{2}$$

можно пренебречь. Если для оценки привлечь соотношения, существующие в дорожке Кармана, то на основании (4.35) можно судить, что второй член, $\rho (\nabla \varphi)^2/2$, мал в сравнении с первым при расстояниях от оси дорожки H , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \gg \exp\left(-\frac{2\pi H}{l}\right),$$

что уже хорошо соблюдается при $H \approx l/2$. В действительности вихри срываются с тела не совсем регулярно, так что в спектре вихревого звука присутствуют, помимо основной частоты Струхала f , и другие частоты (обертоны f и шумовой фон).

Мы ограничимся рассмотрением лишь основной частоты f , доминирующей по интенсивности и соответствующей

щей образованию идеальной дорожки Кармана. Мы будем поэтому рассматривать лишь ту часть потенциала φ , которая гармонически зависит от времени с частотой $f = v/d$. Соответствующее волновое число $2\pi f/c$ обозначим через k ,

$$k = 2\pi f/c = \omega/c.$$

Проведем теперь около тела и дорожки Кармана некоторую контрольную поверхность S так, чтобы вблизи тела она проходила в упомянутой выше области, где, с одной стороны, справедливо уравнение (4.50), а с другой стороны, движение жидкости можно считать несжимаемым. Впереди тела эта поверхность пусть образуется плоскостью AB и затем продолжается плоскостями AC , BD (см. рис. 42), прикрывающими вихревую дорожку. Далее, очевидно, достаточно рассматривать отрезок цилиндра длиной $-L/2 < \zeta < L/2$, так как состояние вдоль цилиндра не меняется, а концевые эффекты мы будем игнорировать. Если бы значения потенциала и его производных на этой поверхности были известны, то, применяя обобщенную для уравнения (4.50) теорему Кирхгофа (1.108), мы могли бы найти значение потенциала в любой точке пространства.

Интеграл по выбранной нами поверхности распадается на две существенно различные части: на интеграл по поверхности $O''BAO'$, лежащей в неволновой зоне, и на интегралы по плоскостям $O'C$ и $O''D$, облегающим дорожку Кармана и лежащим в значительной части в волновой зоне. Значения потенциала φ и его производных на первой из указанных поверхностей могут быть заменены значениями Φ_0 , представляющими движение несжимаемой жидкости. Тогда интеграл по AB пропадет, так как эта поверхность проведена в невозмущенном потоке, где $\Phi_0 = 0$, и останутся интегрирования по AO' и BO'' . На плоскостях $O'C$ и $O''D$, уходящих в бесконечность, потенциал φ можно представить в виде суммы потенциалов Φ'_0 и φ' . Первый представляет потенциал дорожки Кармана, и интеграл от него исчезнет в волновой зоне (дорожка не излучает). Вторым, φ' , представляет часть волнового поля, исходящего от срывающихся вихрей. Интеграл от этой части дает в точке наблюдений P некоторый, вообще говоря, не исчезающий результат, который мы обозначим

через φ''_R . Обозначая часть поля в точке P , происходящую от интегрирования по AO' и BO'' , через φ'_R , мы получим для полного поля в P :

$$\varphi_R = \varphi'_R + \varphi''_R.$$

Так как выбранные нами поверхности интеграции AO' и BO'' проходят вблизи источника, то интегрирование по ним должно уже дать основную часть поля φ'_R . Поле же φ''_R , имеющее ту же физическую причину, что и φ'_R , не может обладать и другой симметрией, нежели φ'_R (оба они создаются одним и тем же несжимаемым движением жидкости вблизи обтекаемого цилиндра). Поэтому величина φ''_R по крайней мере такого же порядка, как и φ'_R , и имеет ту же симметрию. В силу этого для оценки порядка величин и определения симметрии поля (нулевой источник или диполь и т. п.) достаточно вычислить φ'_R . Это поле получается применением теоремы (1.108) к поверхности (AO' и BO''), т. е.

$$\begin{aligned} \varphi'_R = & \frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} \frac{e^{-ikR}}{R^*} - \Phi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-ikR}}{R^*} \right) \right\}_{\eta=H}, \\ & - \frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} \frac{e^{-ikR}}{R^*} - \Phi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-ikR}}{R^*} \right) \right\}_{\eta=-H}, \quad (4.51) \end{aligned}$$

где ξ_1 — координаты точки A , а ξ_2 — точки O , так что $\xi_2 - \xi_1 \approx l$ и $H \approx l/2$.

Мы сделаем теперь предположение, что симметрия в той области, где зарождаются вихри, для части потока, имеющей основную частоту, такова же, как и симметрия потока в установившейся дорожке Кармана, т. е. мы предполагаем, что вихри развиваются поочередно то на верхней кромке обтекаемого тела, то на нижней, со сдвигом фаз π (это более наглядное требование несколько более жестко, чем только что сформулированное требование для компоненты движения, имеющей частоту f , но из второго обя-

зательно следует первое). Эта симметрия характеризуется тем, что ¹⁾

$$\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)_{\eta=H} = -\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)_{\eta=-H}, \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_0(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)_{\eta=H} = \left(\frac{\partial \Phi_0(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)_{\eta=-H}, \quad (4.53)$$

и ведет к дипольному излучению с диполем, ось которого перпендикулярна к потоку (плюс высшие мультипольные излучения, интенсивности которых будут убывать в $(kl)^2$ раз по мере возрастания мультипольности). Действительно, разлагая в формуле (4.51) в ряд Тейлора $\frac{e^{-ikR}}{R^*}$ и $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-ikR}}{R^*} \right)$ по степеням $kH \ll 1$ и переходя к $r \rightarrow \infty$, мы получим с учетом (4.52) и (4.53)

$$\begin{aligned} \varphi'_R = & -\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{2\pi R^*} \frac{\partial R}{\partial \eta} ikH \times \\ & \times \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\zeta \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \frac{\Phi_0}{H} \right\}_{\eta=H} + \dots \end{aligned} \quad (4.54)$$

Величины $\partial \Phi_0 / \partial \eta$ и Φ_0 / H пропорциональны v , и их средние значения лишь множителем отличаются от v . Величина H примерно равна $l/2$, $\xi_2 - \xi_1 \approx l$. Наконец, $\partial R / \partial \eta$ только величинами порядка v^2/c^2 отличаются от $\cos \vartheta$, где ϑ — угол между осью $O\eta$ (ось диполя) и направлением на точку наблюдения P . Поэтому вместо (4.54) мы можем написать:

$$\varphi'_R = -\frac{ikav}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{r} Ll^2 \cos \vartheta, \quad (4.55)$$

где α — числовой коэффициент $\ll 1$ (представляющий в существенном среднее значение безразмерной скорости $\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta}$ по оси $O\eta$ в плоскости AO').

¹⁾ Соответствие этих соотношений симметрии дорожки Кармана легко проверить, если иметь в виду, что потенциал одной вихревой цепочки, расположенной по линии $y^* = h/2$, симметричен по отношению к замене $(y - h/2)$ на $-(y - h/2)$, а другой, расположенной по линии $y^* = -h/2$, симметричен при замене $(y + h/2)$ на $-(y + h/2)$, и что фазы потенциалов по оси Ox для основной частоты смещены на полпериода.

Вычислим теперь поток энергии N в системе координат, в которой среда покоится, а тело движется со скоростью v . Согласно (4.60) этот поток равен:

$$N = \frac{i\rho\omega'}{4} (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) = \frac{\rho\omega'k}{2} \nabla R |\varphi|^2, \quad (4.56)$$

где ω' — частота, измененная из-за эффекта Доплера:

$$\omega' = 2\pi f \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}\right) = 2\pi f \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right). \quad (4.57)$$

Поскольку мы пренебрегли квадрупольным излучением, постольку нет смысла сохранять высшие степени v/c при подстановке φ из (4.55) в (4.56). Пренебрегая ими, получаем:

$$N_r = \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{32\pi^2 r^2} \frac{\rho\omega^4 v^2}{c^3} L^2 l^4, \quad (4.58)$$

а полная излучаемая в 1 секунду энергия будет:

$$I = \int N_r d\Omega = \frac{\alpha^2}{24\pi} \frac{\rho\omega^4 v^2}{c^3} L^2 l^4. \quad (4.59)$$

Замечая, что $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi v}{l} \left(1 - \frac{u}{v}\right)$, где u — скорость вихрей, получим:

$$N = \frac{\pi^2 \alpha^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \frac{\rho v^6}{c^3} L^2 \left(1 - \frac{u}{v}\right)^4, \quad (4.58')$$

$$I = \frac{2\pi^3}{3} \alpha^2 \frac{\rho v^6}{c^3} L^2 \left(1 - \frac{u}{v}\right)^4, \quad (4.59')$$

причем согласно данным таблицы на стр. 141 для цилиндра $1 - (u/v) = 0,86$, для пластинки $0,80$. Таким образом, мы получим формулу, уже ранее найденную нами из соображений размерности (ср. § 22). Однако направление оси диполя теперь фиксировано. Ось диполя расположена перпендикулярно к направлению потока. Далее оказывается, что интенсивность пропорциональна квадрату длины отрезка цилиндра (или пластинки).

По наблюдениям В. Холле [46] действительно при малых удлинениях ($L/d \leq 15$) интенсивность звука пропорциональна некоторой степени L , близкой к 2. При $L/d > 30$, по его же наблюдениям, L пропорционально не L^2 ,

а Ld . Суть дела, по-видимому, заключается в том, что при больших L/d нарушается когерентность излучения отдельными участками цилиндра. Это соображение весьма правдоподобно, если иметь в виду, что длинные вихревые нити, как они рассматриваются в теории Кармана, вряд ли устойчивы и наверное распадаются на некоторые отрезки длиной, скажем, ΔL ¹⁾. Тогда интенсивность будет пропорциональна не L^2 , а

$$\Sigma \Delta L^2 = \frac{L}{\Delta L} \Delta L^2 = L \Delta L,$$

причем ΔL уже не зависит от L , так что $\Delta L = \beta d$, где β — некоторый численный коэффициент, вообще говоря, зависящий от d/L . При умеренных значениях удлинения L/d $\beta = L/d$, а при больших L/d $\beta = \text{const}$.

Таким образом, для длинных тел вместо (4.58') и (4.59') следует ожидать

$$N = \frac{\pi^2 \alpha^2 \beta \cos^2 \vartheta}{2r^2} \frac{\rho v^6}{c^3} L d \left(1 - \frac{u}{v}\right)^4, \quad (4.58'')$$

$$I = \frac{2\pi^3}{3} \alpha^2 \beta \frac{\rho v^6}{c^3} L d \left(1 - \frac{u}{v}\right)^4. \quad (4.59'')$$

Если исходить из упомянутых опытов Холле, то следует ожидать, что $\beta = L/d$ для $L/d \sim 10$ и $\beta = \text{const}$ для $L/d > 20$.

Как из ранее выведенных формул, так и из полученных теперь следует, что интенсивность вихревого звука пропорциональна плотности среды ρ и обратно пропорциональна кубу скорости звука. Поэтому интенсивность вихревого звука, при прочих равных условиях, в воде в 10 раз больше его интенсивности в воздухе. Выразая интенсивность в децибелах по отношению к пороговому давлению $2 \cdot 10^{-4}$ бар, получим:

$$N \text{ (дБ)} = 80 + 10 \lg \frac{N_{\rho c}}{4}. \quad (4.60)$$

По данным В. Холле [46] для цилиндра с длиной $L = 22,5$ см диаметром $d = 1,2$ см при $v = 35$ м/с на расстоянии $r = 1$ м (и $\cos \vartheta = 1$) интенсивность вихревого звука $N = 80$ дБ. Пользуясь этими данными и (4.58''), находим

¹⁾ Это допущение следовало бы подвергнуть экспериментальной проверке.

$\pi^2 \alpha^2 \beta / 2 = 10^{-3}$, откуда при $\beta \approx 10$ получается $\pi \alpha = 1,4 \cdot 10^{-2}$. Это значение хорошо согласуется с исходными предположениями теории. Действительно, α в основном сводится к значению отношения v_y/v на расстоянии от дорожки $y=l/2$. Согласно (4.33') на этом расстоянии

$$\frac{v_y}{v} \approx \frac{u}{v} e^{-\pi} = 0,2 e^{-\pi} = 10^{-2}.$$

§ 26. Замечания о вихревом шуме винтов

Опыт показывает, что вихревой шум винтов имеет спектр, в котором одна из частот относительно сильно выражена, так что спектр состоит из острого пика на размытом фоне (рис. 43). Эта особенность вихревого шума станет понятной, если обратить внимание на тот факт, что его интенсивность растет очень быстро со скоростью

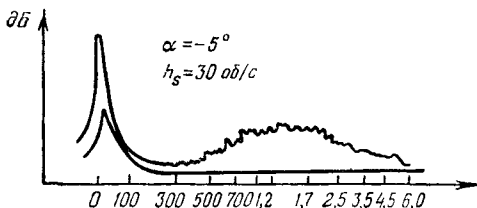


Рис. 43.

(как v^6). Действительно, этот шум можно рассматривать как порождаемый вихрями, срывающимися с различных частей (дужек) лопасти. Мы можем получить некоторое представление о спектре этого шума, если допустим, что отдельные части лопасти дают самостоятельное вихреобразование, и приложим к каждой такой части лопасти формулу для интенсивности вихревого звука, введенную нами из соображений размерности и детализированную в предыдущем параграфе для специального случая цилиндра или пластинки.

Обозначим длину отрезка лопасти, на протяжении которого мало меняется профиль лопасти и его угол атаки, через ΔR . Ширину профиля в этом же участке обозначим

через $l(R)$. Тогда интенсивность вихревого звука, порождаемая этим участком, будет:

$$\Delta I = \gamma l(R) \Delta R v^6(R); \quad \gamma = \frac{\pi^2 \alpha^2 \beta \cos^2 \vartheta}{2r^2}, \quad (4.61)$$

где $v = 2\pi RN$ есть окружная скорость дужки, R — ее расстояние от оси винта, N — число оборотов винта. Частота, преимущественно излучаемая этим участком, будет:

$$f(R) = \kappa \frac{v(R)}{d(R)} = 2\pi \kappa N \frac{R}{d(R)}, \quad (4.62)$$

где $d(R)$ — ширина пластинки, эквивалентной элементу лопасти. Можно положить

$$d(R) = l \sin \alpha + b \cos \alpha, \quad (4.63)$$

где α — угол атаки дужки, l — ее ширина, b — толщина (l, b, α суть функции R). Из (4.62) и (4.63) находим $R = R(f)$ и также $d(f)$, $l(f)$, $\Delta R(f) = \frac{dR}{df} \Delta f$. Подставляя в (4.61), получаем:

$$\Delta I = \gamma l(f) d^6(f) f^6 \Delta f \frac{dR}{df}, \quad (4.64)$$

что и дает спектральное распределение излучаемого винтом вихревого звука. Оно имеет острый максимум около некоторой частоты f . Это очевидно из того, что f и R связаны сперва приблизительно линейно ($R \sim f$), а при $f \rightarrow \infty$ $R \rightarrow R_0$, где R_0 — радиус винта [в самом деле: $d(R_0) = 0$, тогда из (4.62) следует $f = \infty$]. Поэтому в (4.64) множитель f^6 быстро нарастает, а множители dR/df и $d^6(f)$ стремятся к нулю при $f \rightarrow \infty$.

Разумеется, формула (4.64) может дать лишь самое грубое представление о спектральном составе и об интенсивности вихревого шума винта, так как положенные в основу ее вывода предположения не могут претендовать на большую точность. Входящий в коэффициент γ угол ϑ , как мы знаем из § 25, есть угол между лучом в точку наблюдения и осью диполя, который перпендикулярен к потоку. Так как лопасти движутся перпендикулярно к оси винта, то это есть угол между лучом в точку наблюдения и осью винта. Максимальная интенсивность вихревого шума будет, следовательно, излучаться вперед и назад, по оси

винта, что и наблюдается на самом деле (ср. [47]). Напомним читателю, что звук вращения винта (ср. § 18) излучается, напротив, в направлениях, почти перпендикулярных к оси винта. Частоты этих двух звуков, как уже отмечалось, также различны. Частота звука вращения суть $f_0 = Nn$ (n — число лопастей, ср. § 18), а частота вихревого звука равна

$$f = \kappa \frac{2\pi NR}{d}, \quad (4.65)$$

где \bar{R} и \bar{d} суть значения R и d для наиболее интенсивной частоты. Отношение частот этих двух звуков будет

$$\frac{f}{f_0} = 2\pi \kappa \frac{R}{d} \frac{1}{n}. \quad (4.66)$$

Так как $n=2$ или 3, $\kappa \approx 0,2$, а R обычно в несколько раз (6—10) больше d , то частота вихревого звука в несколько раз превышает частоту звука вращения.

§ 27. Возбуждение резонаторов потоком

Ранее мы рассмотрели происхождение звука при обтекании тел потоком воздуха. Наша теория не может быть, однако, приложена без дальнейшего к телам любой формы. Мы предполагали неявно, что тело имеет сравнительно простую геометрическую форму, могущую быть с достаточной полнотой охарактеризованной одной длиной d , которая и определит частоту излучаемого звука по формуле Струхаля $f = \kappa v/d$. Для тел более сложной формы дело обстоит иначе. Ясно, например, что если на теле простой формы с характерным размером d_1 имеется, скажем, выступ с характерным размером d_2 , то мы при одной и той же скорости потока v будем иметь две вихревые частоты:

$$f_1 = \kappa_1 \frac{v}{d_1}, \quad f_2 = \kappa_2 \frac{v}{d_2}. \quad (4.67)$$

Наличие всяких выступов, резких углов, изломов профиля, шероховатостей и т. п. может существенно изменить спектр звука.

Совсем особенные явления возникают в тех случаях, когда обтекаемое тело имеет не выступы, а полости. Такие

полости являются акустическими резонаторами, обладающими собственными колебаниями с частотами ν_s и коэффициентами затухания h_s . Собственные частоты такого резонатора определяются его размерами d и скоростью звука c :

$$\nu_s = \frac{c}{d} \psi_s \left(\frac{c}{d} h_s \right), \quad (4.68)$$

где ψ_s — некоторый численный коэффициент. Величина коэффициента затухания зависит еще от вязкости воздуха μ и от его теплопроводности κ (если теплопроводность стенок резонатора много больше теплопроводности воздуха, то от нее h_s не зависит). Можно сказать, что при наличии в теле способных к резонансу полостей частоты, могущие быть связанными с телом, зависят не только от отношений ν/d , но и от отношений c/d .

Простейшими примерами таких резонаторов будут, например, трубы, открытые с одного или обоих концов, резонаторы Гельмгольца (в виде бутылей) и т. п. Все такого рода резонаторы легко заставить звучать в потоке воздуха, обдувая их устье. Явление это может иметь самые разнообразные масштабы, начиная от звучания на ветру какой-нибудь малой полости приемного микрофона (ветровая помеха) до катастрофических явлений возбуждения колебаний в открытой аэродинамической трубе, могущего привести к разрушению трубы и здания ¹⁾. Это же явление в последней войне было применено противником в так называемых воющих бомбах, рассчитанных на усиление психологического эффекта. Оно находит себе и другие, более целесообразные применения в военном деле. Напомним также, что, в сущности, все духовые музыкальные инструменты и гудки основаны на явлении возбуждения колебаний потоком воздуха.

Во всех этих случаях можно различать две взаимодействующие системы: вихри, возникающие при обтекании

¹⁾ Открытая аэродинамическая труба представляет собой резонатор — трубу с открытыми концами и согнутую в виде тора. Поток, возбуждающий колебания, служит поток внутри самой трубы, а вихреобразования получаются при выходе этой струи в рабочее пространство (разрез тора). Интересные исследования колебаний, возникающих в такой системе, были произведены С. П. Стрелковым [50].

тела потоком, с одной стороны, и резонатор — с другой. Вихри, разумеется, не являются жесткой системой, и их действие на резонатор, строго говоря, нельзя рассматривать как действие внешней, заданной силы. Напротив, следует ожидать, что колебания резонатора сами влияют на образование вихрей, на их частоту и интенсивность, так что вся наша система должна рассматриваться как автоколебательная нелинейная система, установившийся режим в которой предписывается скоростью потока v и коэффициентом затухания резонатора h_s . Из соображений размерности можно написать для амплитуды колебаний давления в резонаторе следующую формулу:

$$p = \rho \frac{v^2}{2} \varphi\left(\frac{v v_s}{d}, \frac{h_s}{v_s}\right). \quad (4.69)$$

При этом в области максимального возбуждения резонатора (авторезонанс) эта амплитуда должна быть обратно пропорциональна коэффициенту затухания h_s :

$$p_s = \rho \frac{v'^2}{2} \frac{v_s}{h_s} \varphi_s\left(\frac{v' v_s}{d}\right), \quad (4.70)$$

где штрих у скорости v означает, что формула справедлива лишь при некотором определенном значении $v = v'$.

Нелинейные явления, протекающие в рассматриваемых системах, при современном состоянии теории вихреобразования не могут быть рассмотрены подробней математически. Расчет возникающих при обтекании тела вихрей и в отсутствие резонатора представляет нерешенную до сих пор проблему. Тем не менее можно рассчитывать на успех расчета при наличии резонатора, когда может иметь место, например, захват частоты колебаний вихрей колебаниями резонатора и т. п. явления, характерные для автоколебательных систем. Поэтому, напротив, интересно знать, в какой мере может быть пригодной для практических целей более примитивная точка зрения, игнорирующая нелинейный характер связи между вихрями и резонатором, рассматривающая пульсации давления, вызванные вихреобразованием, как заданную внешнюю силу, приложенную к резонатору. Очевидно, что такой упрощенный подход к интересующему нас явлению возможен лишь в том случае, если система вихрей имеет значительную степень самостоятельности, так что амплитуды и ча-

стоты этой системы в основном определяются скоростью и геометрией потока, а не колебаниями резонатора. Будь это так, нелинейные явления, вроде захвата частоты, можно было бы рассматривать как некоторую деликатную подробность, учет которой необязателен при оценках, преследующих получение самых основных сведений. А priori можно было бы думать и иначе, считая, что при наличии резонатора колебания вихрей целиком определяются, навязываются потоку колебаниями резонатора.

Поставленный вопрос мог быть решен только экспериментальным путем.

Автором книги были произведены опыты по возбуждению резонаторов потоком воздуха [51]. В качестве резонатора была взята четырехгранная труба, закрытая с одного конца и помещавшаяся в поток воздуха, скорость которого можно было доводить до 35 м/с. В дно трубы ввинчивался измерительный микрофон, с помощью которого определялось давление возникающих в трубе колебаний. Эта труба легко возбуждалась при определенных скоростях потока, звуча со свойствами ей собственными частотами

$$\nu_s = \frac{c}{4l} (2s + 1), \quad s = 1, 2, 3 \dots$$

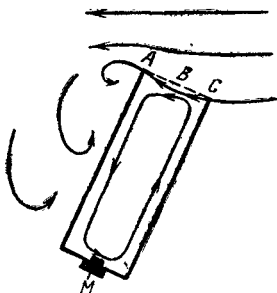


Рис. 44.

Картина течений около такой трубы и внутри нее изображена на рис. 44. Возникающая внутри трубы циркуляция, характерная вообще для всякой обтекаемой потоком полости, весьма медленна и не имеет существенного значения для интересующих нас явлений. Напротив, в этом отношении крайне важна область около устья резонатора, где образуется, как и при обтекании твердых тел, неустойчивая граница раздела (ABC) между струей и застойной областью. Именно на этой границе и получается вихреобразование, которое, таким образом, должно существенно зависеть от геометрии устья резонатора. Чтобы выяснить характер вихреобразования вне зависимости от наличия резонатора, последний был задемпфирован демпфером из ваты и сеток, помещенным на дно резонатора. Обтекание

устья при этом практически не менялось, а резонатор как бы устранялся. При этом демпфирование подбиралось так, чтобы частотная характеристика измерительного микрофона, помещенного на дно резонатора, совпадала с частотной характеристикой микрофона самого по себе. Таким путем можно было определить спектральный состав пульсаций давления, обусловленных вихреобразованием

в устье резонатора. Оказалось, что частоты вихрей подчиняются формуле (4.67):

$$f_n = \kappa \frac{v}{d} n, \quad \kappa = 0,65, \\ n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.71)$$

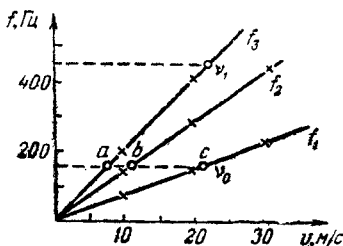


Рис. 45.

где d — длина ребра устья резонатора. Значение коэффициента κ дано для угла атаки $\alpha = 70^\circ$ (рис. 44), в окрестности которого только и наблюдалось возбуждение резонаторов.

Таким образом было обнаружено существование двух обертонов частоты Струхали, что и заставило нас написать в § 22 обобщенную формулу (4.6). Амплитуда давления этих обертонов, как и следовало ожидать, пропорциональна квадрату скорости потока:

$$P_n = \beta_n \rho \frac{v^2}{2}, \quad (4.72)$$

где для $\alpha = 70^\circ$ $\beta_1 = 0,055$, $\beta_2 = 0,020$, $\beta_3 = 0,010$. На рис. 45 изображена частота вихрей в функции скорости потока v . На этом же рисунке горизонтальными линиями показаны собственные частоты резонатора ν_s . В точках пересечения этих линий, т. е. при

$$\nu_s = f_n, \quad (4.73)$$

отмеченных на рис. 45 кружками, являющихся точками резонанса, следовало ожидать возбуждения резонатора. Это и оправдалось на самом деле. При удалении демпфера резонатор возбуждался при скоростях потока v' , определяемых из (4.71) и (4.73):

$$v' = \frac{\nu_s d}{\kappa n}. \quad (4.74)$$

Тот факт, что вихри существуют сами по себе, позволяет, по крайней мере для оценки, вычислить давление, возникающее в резонаторе в результате воздействия вихрей. Если мы обозначим через $q(\omega)$ коэффициент усиления резонатора для частоты ω ($\omega = 2\pi f$), то амплитуда давле-

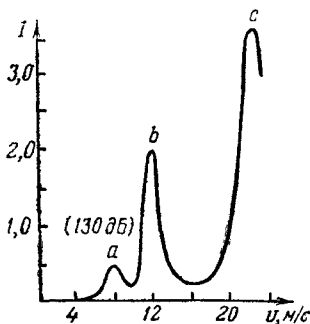


Рис. 46.

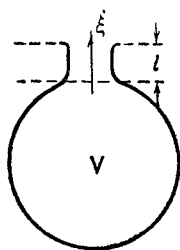


Рис. 47.

ния p на дне резонатора, если к его устью приложено давление частоты ω и с амплитудой P , будет

$$p = q(\omega) P. \quad (4.75)$$

Формула эта предполагает линейный характер колебаний; $q(\omega)$ зависит от вида резонатора, но для всех резонаторов, в области резонансной частоты ($\omega = 2\pi\nu_s$), $q(\omega)$ обратно пропорционально коэффициенту затухания h_s . Сравнение результатов расчета по этой формуле с измеренными значениями p показывает [51] согласие по порядку величины. Наблюдаемое различие доходит до 6 дБ (два раза), что уже служит указанием на то, что расхождения обуславливаются не ошибками измерения, но несоответствием предположений о жесткости вихревой системы, в действительности подвергающейся обратному действию колебаний резонатора (автоколебательный характер явлений). На рис. 46 приведены кривые возбуждения резонатора (I в функции ν).

Максимумы возбуждения соответствуют резонансам вихревых частот и собственных частот резонатора. Они отмечены теми же буквами, что и кружки на рис. 45.

Последний максимум (с) отвечает сразу двум резонансам (рис. 46), когда второй обертоп вихрей совпадает с первым обертоном резонатора и одновременно основной тон резонатора совпадает с основным тоном вихрей ¹⁾. Возникающие в этом случае колебания оказываются бигармоническими.

Высота максимумов обратно пропорциональна коэффициенту затухания, что было проверено изменением демпфирования резонатора. Равным образом подтверждается и зависимость частоты вихрей от размеров устья резонатора (4.71). Расчет коэффициента усиления резонатора для различных резонаторов приводится во многих курсах акустики.

Для простого гармонического осциллятора Гельмгольца (рис. 47) уравнение колебаний гласит:

$$\ddot{\xi} + 2h\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{sP}{M}, \quad (4.76)$$

где $\dot{\xi}$ — скорость движения массы воздуха в горле резонатора, h — коэффициент затухания резонатора, ω_0 — собственная частота, s — площадь горла, P — приложенное извне переменное давление, M — масса воздуха, движущегося в горле резонатора. $M = \rho Ls$, где L — эффективная длина горла, ρ — плотность воздуха, $L = l + \alpha a$, где l — длина горла, a — его радиус, α — численный коэффициент, равный для круглого отверстия $\pi/2$. Собственная частота ω_0 равна:

$$\omega_0 = c \sqrt{s/LV}, \quad (4.77)$$

где V — объем резонатора. Решая уравнение (4.76) для внешней силы, имеющей частоту ω , получим для амплитуды смещения ξ_0 :

$$\xi_0 = \frac{sP}{M} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2}} \quad (4.78)$$

(если $\omega_0 \gg h$). Изменения давления внутри резонатора при адиабатическом изменении объема заключенного в нем воздуха будут иметь амплитуду

$$p = \rho c^2 \frac{\Delta V}{V} = \rho c^2 \frac{\xi_0 s}{V}. \quad (4.79)$$

¹⁾ Это обстоятельство является случайным и вызвано особенностью данного резонатора.

Подставляя (4.78) в (4.79) и учитывая (4.77), найдем:

$$p = P \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2}}, \quad (4.80)$$

откуда

$$q(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2}}. \quad (4.81)$$

При резонансе ($\omega = \omega_0$) $q(\omega) = \omega_0/2h$, так что амплитуда колебаний резонатора, возбужденного потоком воздуха, будет:

$$p = \beta \rho \frac{v^2}{2} \frac{\omega_0}{2h}. \quad (4.82)$$

Численный коэффициент β зависит от формы горла и угла набегания потока (как упоминалось для четырехугольного горла, при $\alpha = 70^\circ$ $\beta = 0,055$).

Другой простой случай резонатора представляет собой закрытая с одного конца труба, вроде фигурировавшей в изложенных выше опытах (рис. 44). В этом случае речь идет о колебаниях распределенной системы. Смещения воздуха вдоль оси трубы, которую мы совместим с осью Ox , подчиняются здесь волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + c^2 \delta \frac{\partial \xi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.83)$$

где δ — коэффициент трения, учитывающий потери на теплопроводность и вязкость воздуха ¹⁾. Давление p в каждой точке равно:

$$p = -\rho c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.84)$$

Уравнение (4.83) должно быть решено при краевых условиях

$$(\xi)_{x=0} = 0, \quad -\rho c^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=l} = P, \quad (4.85)$$

выражающих тот факт, что на закрытом конце трубы ($x=0$) воздух находится в покое, а на открытом конце давление равно приложенному извне давлению P . Если еще учесть,

¹⁾ Простой способ расчета этого коэффициента дан в работе автора [4].

что в колебаниях трубы принимает также участие воздух, прилегающий к устью, то последнее краевое условие должно быть пополнено давлением P' , представляющим реакцию присоединенной массы воздуха. Если импеданс этой массы, называемый обычно импедансом устья, есть $Z = X + iY$, то $P' = \rho c (X + iY)$. Таким образом, вместо (4.85) имеем:

$$(\xi)_{x=0} = 0, \quad -\rho c^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=l} = \rho c (X + iY) (\xi)_{x=l} + P. \quad (4.86)$$

Активная часть этого импеданса, X , происходит от потерь на излучение, а реактивная, Y , определяется массой соко-
леблющегося воздуха. Эти величины для отверстия площадью s равны:

$$X = \frac{\omega^2 s}{4\pi c^2}, \quad Y = 0,7 \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{s}{\pi}}; \quad (4.87)$$

подробности о них можно найти, например, в работе Л. Я. Гутина [52]. Считая, что внешнее давление гармонически зависит от времени с частотой ω , мы можем принять смещение ξ пропорциональным $e^{i\omega t}$. Тогда из (4.83) легко находим решение, удовлетворяющее краевому условию $\xi = 0$ при $x = 0$:

$$\xi = \xi_0 \sin Kx, \quad K = + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\delta}. \quad (4.88)$$

При малом затухании ($\delta \ll \omega$) можем положить:

$$K = k - i\kappa, \quad k = \omega/c, \quad \kappa = \delta c/2. \quad (4.89)$$

Подставляя (4.88) во второе краевое условие (4.86), определим амплитуду ξ_0 :

$$\xi_0 = - \frac{P}{i\omega\rho c (X + iY) \sin Kl + \rho c^2 K \cos Kl}. \quad (4.90)$$

Отделяя здесь действительную и мнимую части и учитывая, что $\kappa l \ll 1$, $X, Y \ll 1$, получим для амплитуд P и ξ_0 :

$$\xi_0 = \frac{P}{\omega\rho c \sqrt{(\cos kl - Y \sin kl)^2 + \left(\sin kl \frac{kl}{c}\right)^2}}, \quad (4.91)$$

где

$$h = \frac{c}{l} X + \frac{\delta c^2}{2} \quad (4.92)$$

есть коэффициент затухания резонатора.

На основании (4.84) амплитуда давления на дне резонатора при $x=0$ равна $\xi_0 p \cos$. Поэтому искомый коэффициент усиления резонатора равен:

$$q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\cos kl - Y \sin kl)^2 + \left(\sin kl \frac{hl}{c}\right)^2}}. \quad (4.93)$$

Точки $\cos kl - Y \sin kl = 0$ определяют положение резонансных частот. Пользуясь малостью Y , это условие можно представить в виде

$$\cos \frac{\omega L}{c} = 0; \quad \omega_s = \frac{\pi c}{2L} (2s + 1), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.94)$$

где L — эффективная длина резонатора:

$$L = l + 0,7 \sqrt{s/\pi}. \quad (4.95)$$

В точках резонанса значение коэффициента усиления равно

$$q(\omega) = c/hl \quad (4.96)$$

[так как $\sin(k_s l) \approx 1$]. Стало быть, амплитуда колебаний давления в резонаторе под действием внешнего потока будет:

$$p = \beta p \frac{v^2}{2} \frac{c}{h_s l}. \quad (4.97)$$

Эта формула и может служить для оценки величины p .

Обратимся теперь к вычислению интенсивности звука, излучаемого резонатором, возбужденным потоком воздуха. Очевидно, что достаточно вычислить энергию, излучаемую через устье резонатора, и для дальнейшего воспользоваться законом обратного квадрата расстояния. Средний поток энергии через устье резонатора согласно общей формуле (1.58) равен

$$\bar{N} = \overline{p^2} S = \frac{1}{2} p_0'^2 \xi_0 S, \quad (4.98)$$

где ξ_0 — амплитуда скорости колебаний воздуха вблизи устья, а p'_0 — амплитуда той части давления воздуха около устья, которое вызвано излучением. Эта часть равна $\rho c X \xi_0$. Поэтому средний поток энергии через все устье есть

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \rho c X \xi_0^2 S, \quad (4.99)$$

а поток энергии через 1 см² на расстоянии r от резонатора будет

$$N_0 = \frac{1}{8\pi r^2} \rho c X S \xi_0^2. \quad (4.100)$$

Для получения окончательного результата нам нужно взять значение ξ_0 в точке резонанса. Согласно (4.91) для трубы

$$\xi_0 = \frac{P}{\rho c} \frac{c}{h_s l},$$

а для резонатора Гельмгольца по (4.78)

$$\xi_0 = \frac{P}{\rho c} \frac{c}{2hL}.$$

Поэтому для трубы получаем:

$$N'_0 = \frac{X' S'}{8\pi r^2 \rho c} \frac{c^2}{h_s^2 l^2} \beta'^2 \left(\rho \frac{v_s^2}{2} \right)^2, \quad (4.101)$$

а для резонатора Гельмгольца

$$N''_0 = \frac{X'' S''}{8\pi r^2 \rho c} \frac{c^2}{2h^2 L^2} \beta'^2 \left(\rho \frac{v_0^2}{2} \right)^2, \quad (4.101')$$

где v_s — скорость, соответствующая возбуждению s -го колебания трубы, а v_0 — скорость, при которой возбуждается резонатор Гельмгольца.

РАБОТА ПРИЕМНИКА ЗВУКА, ПОМЕЩЕННОГО В ПОТОК

§ 28. Физические явления при обтекании приемника потоком

Приемник звука, помещенный в поток, будь то поток воздуха или вода, будет фиксировать периодические изменения давления, вызываемые не только приходящим звуковым сигналом, но и обтеканием потоком его собственного тела. Подобного рода периодические пульсации давления мы называли «псевдозвуком». Ясно, что такого рода псевдозвук будет служить помехой для успешного приема полезного сигнала и, при том, может быть, весьма значительной. Практикам хорошо известно, сколь сильно при ветре снижается слышимость звука далекого самолета. Подобное же снижение слышимости имеет место и при работе подводных гидрофонов на ходу корабля (впрочем, в этом случае примешиваются еще и шумы самого корабля).

Поэтому случай работы приемника звука в потоке представляет известный практический интерес. Мы должны прежде всего отличать явления, вызываемые нестационарностью потока, от явлений, имеющих место и в стационарном потоке. Обратимся сперва к последнему.

Стационарный поток не содержит сам по себе периодических во времени пульсаций давления, но такие пульсации возникают на самом теле приемника из-за вихреобразования. Вихреобразование является в рассматриваемом случае единственной причиной псевдозвука. Как мы знаем, преобладающая частота этого звука определяется формулой Струхаля, с которой мы уже неоднократно встречались:

$$f = \kappa \frac{v}{d}. \quad (5.1)$$

Если число Рейнольдса велико ($Re = vd/\nu > 10^5$), то спектр вихревого псевдозвука может быть весьма раз-

мыт около частоты (5.1). Давление псевдозвука будет пропорционально напору:

$$p = \beta \rho v^2 / 2, \quad (5.2)$$

где β — численный коэффициент, опять-таки зависящий от формы тела.

Если поток нестационарен, то на пульсации давления, определяемые вихреобразованием, накладываются еще пульсации давления, свойственные самому потоку.

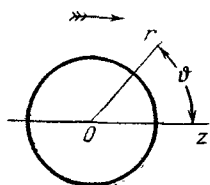


Рис. 48.

Это псевдозвук самого потока, отчасти уже рассмотренный нами ранее (§ 24). В этом случае следует отличать пульсации давления, вызванные локальным, местным, изменением скорости потока, от пульсаций давления, связанных с переносом импульса движением потока. Вопрос, также уже затронутый в § 24, но теперь мы хотим остановиться

на нем подробнее. Простой пример может хорошо иллюстрировать суть дела. Допустим, что приемник имеет форму шара и обтекается потоком в направлении оси Oz (рис. 48). Скорость потока V пусть периодически пульсирует с частотой $\omega = 2\pi/T$:

$$V = V_0 + \delta V \cos \omega t. \quad (5.3)$$

Отвлекаясь теперь от вихреобразования, будем считать поток потенциальным. Уравнение для потенциала Φ гласит:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.4)$$

При этом радиальная компонента скорости $v_r = \partial \Phi / \partial r$ на поверхности шара ($r = a$) должна равняться нулю, а скорость вдали от тела должна обращаться в $V = -\partial \Phi / \partial z$ (5.3). Решение (5.4), удовлетворяющее этим граничным условиям, как легко проверить подстановкой, будет

$$\Phi = V \cos \vartheta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right), \quad r \cos \vartheta = z. \quad (5.5)$$

По формуле Бернулли давление в таком потоке будет

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2, \quad (5.6)$$

и на поверхности тела ($r=a$) на основании (5.5) получаем:

$$p = \text{const} + \frac{3}{2} \rho \cos \vartheta a \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{9}{4} \sin^2 \vartheta \rho \frac{V^2}{2}. \quad (5.6')$$

Из этой формулы видно, что давление складывается из двух частей: из той, которая имеет место и в стационарном потоке,

$$p' = \text{const} - \frac{9}{4} \sin^2 \vartheta \rho \frac{V^2}{2}, \quad (5.7)$$

и из части p'' , определяемой ускорением потока:

$$p'' = \frac{3}{2} \rho \cos \vartheta a \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (5.8)$$

Из сравнения (5.7) и (5.8) на основании (5.3) следует, что переменная часть давления p' , определяемая напором, значительно превосходит часть p'' , определяемую локальным ускорением, если

$$a \frac{\partial V}{\partial t} \ll V \delta V, \quad \text{или} \quad \frac{2\pi a}{T} < V, \quad (5.9)$$

т. е. $p'' \ll p'$, если размеры приемника a достаточно малы. Рассмотренная нами пульсация скорости однородна во всем пространстве. Если пульсации имеют размер Λ , то $T \approx \Lambda/V$ и (5.9) сводится к

$$a \ll \Lambda. \quad (5.10)$$

Это условие было уже нами получено в § 24 другим путем: оно указывает, что при малых размерах приемника, в сравнении с размером пульсации, изменения напора имеют более существенное значение, нежели ускорение потока.

Спектральное распределение псевдозвука нестационарного потока целиком определяется природой потока. Если нестационарность потока создается обтеканием каких-либо тел, расположенных вблизи приемника, так что приемник находится в вихревой дорожке этих тел, то спектральный состав пульсаций определяется частотами Струхалия и их обертонами подобно тому, как мы это видели на примере идеальной дорожки Кармана (ср. § 24).

Вдали от тел дорожка Кармана подвергнется распаду, и поток будет турбулентным. Естественный ветер также представляет собой турбулентный поток. Основные черты этой турбулентности были нами изложены в § 10.

Как уже было отмечено в § 24, расчет величины и спектрального распределения пульсаций давлений на поверхности приемника, помещенного в какой-нибудь нестационарный поток, представляется сейчас непреодолимой задачей. Там же мы указали на возможность частичного анализа этой проблемы на основании соображений размерности в применении к основному уравнению гидродинамики. Именно, мы можем считать, что в общем случае давление на поверхности приемника определяется формулой

$$p = \alpha \rho a \frac{\partial v}{\partial t} + \beta \frac{\rho v^2}{2}. \quad (5.11)$$

Эта формула является обобщением только что выведенной формулы (5.6), справедливой для частного случая. Она выражает тот факт, что давление в какой-нибудь точке пространства и в какой-нибудь момент времени зависит от напора ($\rho v^2/2$) и от локального изменения скорости ($\partial v/\partial t$). Так как скорость меняется не только по величине, но и по направлению, то при пульсациях скорости потока угол атаки будет меняться. В силу этого численные коэффициенты α , β , зависящие от формы тела и угла атаки, будут тоже функциями времени. Если величина пульсаций δv много меньше средней скорости потока v , то изменения α и β будут незначительны. Далее, производная $\partial v/\partial t$ по порядку величины равна $\frac{\delta v}{T} = \frac{V \delta v}{\Lambda}$ и поэтому при выполнении условия (5.10) может быть отброшена. Тогда для переменной части давления p получим:

$$p' = \beta_0 \rho v \delta v + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right)_0 \delta \psi \rho \frac{v^2}{2}, \quad (5.12)$$

где ψ — угол атаки, индекс 0 означает значение β и $\partial \beta/\partial \psi$ при угле атаки основного потока ($\psi = \psi_0$). (Вариация угла атаки $\delta \psi$ равна $\delta v_t/v$, где δv_t — пульсации скорости в направлении, перпендикулярном к v .)

Для изотропных пульсаций $\delta v_i = \delta v$ и, следовательно,

$$p' = \left[\beta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right)_0 \right] \rho v \delta v = \varepsilon \rho v \delta v. \quad (5.13)$$

Спектр давления p' совпадает, стало быть, со спектром пульсаций скорости (δv), и сама его величина может быть вычислена из знания стационарного потока вокруг рассматриваемого тела. Это, по-видимому, единственный рациональный вывод, который может быть сделан из формулы (5.11). Для среднего квадрата пульсаций давления из (5.13) находим:

$$\overline{p'^2} = \varepsilon^2 \rho^2 v^2 \overline{\delta v^2}, \quad (5.14)$$

и спектральное распределение получится по формуле

$$\overline{\delta v^2} = \int [\delta v(\omega)]^2 d\omega, \quad (5.15)$$

где $\delta v(\omega)$ есть амплитуда пульсаций, принадлежащая частоте ω . Следовательно, для среднего квадрата давления тех пульсаций, частоты которых лежат между ω_1 и ω_2 , будем иметь:

$$\overline{p'^2}(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon^2 \rho^2 v^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\delta v(\omega)]^2 d\omega. \quad (5.16)$$

Положим, что коэффициент усиления приемника равен $q(\omega)$, так что сигнал, принимаемый приемником, измеряется величиной P :

$$P = \int q(\omega) p'(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.17)$$

Возведя это в квадрат и усредняя по времени, получим:

$$\overline{P^2} = \int q^2(\omega) \overline{p'^2}(\omega) d\omega, \quad (5.18)$$

где, на основании (5.14),

$$\overline{p'^2}(\omega) d\omega = \varepsilon^2 \rho^2 v^2 [\delta v(\omega)]^2 d\omega. \quad (5.19)$$

Если приемник имеет острые резонансы, так что, например, имеется собственное колебание с частотой $\omega = \omega_0$

и коэффициентом затухания h , то при $\omega = \omega_0$ коэффициент усиления становится особенно большим и, как мы знаем из § 27, равен $q(\omega_0) = q' \omega_0 / h$, где коэффициент q' по порядку величины равен 1. Интегрируя (5.18) около ω_0 в пределах ширины резонансной линии ($\omega_0 - h/2$, $\omega_0 + h/2$), получим:

$$\overline{P^2(\omega_0)} = \int_{\omega_0 - h/2}^{\omega_0 + h/2} q^2(\omega_0) P'^2(\omega_0) d\omega = q'^2 \frac{\omega_0^2}{h} P'^2(\omega_0). \quad (5.20)$$

При малых h эта часть величины P^2 может превалировать над остальными настолько, что практически все воздействие псевдозвука на приемник может свестись к звучанию приемника на резонансной частоте ω_0 . Поэтому приемники с острыми резонансами будут особенно подвержены акустическим помехам.

Рассматриваемый нами случай характерен возможностью сведения действия нестационарного потока к действию потока стационарного. Существенный результат заключается в том, что спектр пульсаций давления сводится к спектру пульсаций скорости. Если набегающий поток представляет собой хорошо развитый турбулентный поток, то мы можем приложить к нему теорию турбулентности, изложенную в § 10.

Эта теория была развита для однородной изотропной турбулентности. Там же был получен «закон 2/3», определяющий спектральное распределение скорости турбулентного движения по пульсациям различных масштабов. Нас же теперь интересует распределение по частотам. Полностью задача о связи распределения по частотам с распределением по пространственным масштабам решается лишь для линейных колебаний среды (например, для звукового шума).

В случае турбулентного движения газа или жидкости эта связь еще не установлена.

Однако для определения спектра скорости по частотам мы можем воспользоваться соображениями, которые были изложены применительно к рассеянию звука в турбулентном потоке (§ 12). Дело в том, что, как было там пояснено, частота турбулентных пульсаций самих по себе весьма мала. Высокие, имеющие значение в акустике частоты получаются благодаря тому, что крупномасштабные пуль-

сации скорости переносят мелкие. Если мы включим крупномасштабные пульсации скорости, которые меняются медленно, в среднюю скорость v (таким образом, v будет иметь смысл средней скорости потока за время, в течение которого эта скорость не претерпевает значительных изменений и которое гораздо больше периода тех частот, которые принимаются нашим приемником), то v как раз и будет скоростью, с которой перемещаются мелкие пульсации скорости. Для этих мелких пульсаций справедлив «закон $2/3$ », согласно которому среднее значение квадрата скорости u для пульсаций, которые имеют масштаб, меньший $\Lambda = 2\pi/q$, будет [см. § 10, формулы (2.63) и (2.64)]

$$E(q) = \frac{1}{2} u^2(q) = \frac{1}{3} \gamma q^{-2/3}; \quad \gamma = \frac{1}{6\pi} \sqrt[3]{2} \left(\frac{D_0}{\pi} \right)^{2/3}. \quad (5.21)$$

Величина $u(q)$ и есть как раз $\delta v(q)$. Таким образом,

$$[\delta v(q)]^2 = \frac{2}{3} \gamma q^{-2/3}. \quad (5.22)$$

Так как эти пространственные пульсации скорости переносятся со скоростью v , то соответствующая им частота будет $f = v/\Lambda$ или $\omega = qv$. Таким образом, интенсивность пульсаций скорости, частоты которых лежат между ω и ∞ , будет:

$$[\delta v(\omega, \infty)]^2 = \frac{2\gamma}{3} \left(\frac{v}{\omega} \right)^{2/3} = \int_{\omega}^{\infty} [\delta v(\omega)]^2 d\omega. \quad (5.23)$$

Дифференцируя эту величину по ω , найдем искомую величину:

$$[\delta v(\omega)]^2 = \frac{4}{9} \gamma \left(\frac{v}{\omega} \right)^{2/3} \frac{1}{\omega}. \quad (5.24)$$

Подставляя этот результат в (5.19), мы найдем формулу для спектрального распределения квадрата давления, действующего на приемник, помещенный в турбулентный поток:

$$p'^2(\omega) d\omega = \frac{4}{9} \gamma \varepsilon^2 \rho^2 v^2 \left(\frac{v}{\omega} \right)^{2/3} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (5.25)$$

Заметим, что константа γ , как это уже указывалось, является, видимо, функцией скорости v . Значение ее

обсуждалось нами в связи с рассеянием звука в турбулентном потоке [ср. § 10, (2.58) и (2.59)].

Поскольку γ и ϵ можно считать известными, постольку формула (5.25) позволяет вычислить спектр турбулентного шума. Как видно из этой формулы, шум турбулентного потока сосредоточивается около низких частот; именно, интенсивность шума около частоты ω пропорциональна $\omega^{-5/2}$. Следует иметь в виду, что при $\omega=0$ формула не годится, так как мы медленные пульсации включили в среднюю скорость v . Что касается зависимости от скорости ветра, если считать γ постоянной, то получается зависимость от скорости $v^{5/2}$. Однако мы уже указывали, что на самом деле γ растет со скоростью, — пока еще трудно судить, как, но по всей совокупности данных примерно как v . Если учесть эту зависимость, то шум должен нарастать как $v^{11/2}$.

Наконец, следует еще иметь в виду, что формула (5.25) не годится также для высоких частот, так как при ее выводе мы предполагаем, что размеры приемника $a \ll \Lambda$. Следовательно, она применима лишь до $\omega < 2\pi v/a$ (в противном случае к ней добавятся члены, вызванные локальным ускорением $\partial v/\partial t$). Несомненно, что она дает низшую границу шума. То обстоятельство, что интенсивность шума растет как $\omega^{-5/2}$, является, видимо, одной из самых крупных неприятностей для звукопеленгации, так как от далекого самолета приходят преимущественно низкие частоты (80—100 Гц), которые и будут маскироваться турбулентным шумом.

§ 29. Ветрозащита приемника звука от вихреобразования

Дать универсальный способ ветрозащиты приемника звука от вихреобразования не представляется возможным. Дело существенно зависит от габаритов приемника и от его рабочего диапазона частот, выбор которого определяется характером сигнала, подлежащего приему. Тем не менее, можно указать некоторые способы, могущие оказаться полезными.

Во-первых, можно варьировать размеры приемника, благодаря чему частоту Струхалия можно смещать либо в сторону низких частот (увеличивая размеры приемника),

либо в сторону высоких (уменьшая его размеры), смотря по тому, что желательно. Этот способ основывается на том, что при одной и той же скорости набегающего потока и форме приемника характерные струхалевские частоты обратно пропорциональны линейным размерам приемника:

$$\frac{f'}{f''} = \frac{d''}{d'}. \quad (5.26)$$

В тех случаях, когда изменение размеров приемника оказывается нерациональным, можно применить звукопрозрачный обтекатель F из сетки или ткани, как это изображено на рис. 49. Основной поток воздуха устремится в этом случае вокруг обтекателя, а скорость потока внутри значительно снизится. При этом частота Струхали образующихся на обтекателе вихрей понизится, и мы получим:

$$f' \approx f \frac{d}{D}, \quad (5.27)$$

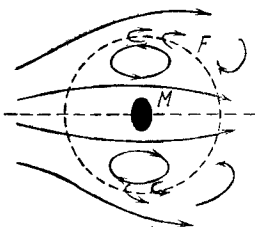


Рис. 49.

где f — частота Струхали на теле приемника M , d — размер приемника, а D — размер обтекателя. При этом необходимо избегать углов, выступов и т. п. на теле обтекателя, так как они могут стать причиной вихреобразования в нежелательной области частот.

Помимо эффекта понижения частоты благодаря обтекателю область вихреобразования отдалается от тела приемника, что будет также полезным результатом этого устройства. Часть потока будет все же проникать внутрь обтекателя, но его скорость v' будет меньше скорости набегающего потока v . В силу этого частота вихреобразования непосредственно на самом приемнике также понизится в отношении

$$f'' = f \frac{v'}{v}, \quad (5.28)$$

а амплитуда давления упадет в $(v'/v)^2$ раз. Произвести исчерпывающий расчет величины v невозможно, но для нее все же можно дать разумные оценки. Для этого нам следует рассмотреть сопротивление сеток потоку проходящего через них воздуха (или воды).

Ввиду того, что сетки широко применяются при различных ветрозащитных устройствах, мы считаем полезным остановиться на них подробнее. Пусть разность давлений по обе стороны сетки равна Δp , объемная скорость протекающего через нее воздуха равна Q см³/с, тогда

$$\Delta p = WQ. \quad (5.29)$$

Определяемую этой формулой величину W и будем называть сопротивлением сетки. Эту величину можно представить в виде

$$W = w \frac{l}{S}, \quad (5.30)$$

где S — поперечное сечение потока, l — эффективная толщина сетки (или другой пористой перегородки, например ткани), w — «удельное сопротивление». Характерной для перегородки величиной является, конечно, произведение wl . Сопротивление W мы будем рассматривать как сопротивление системы параллельных каналов (трубочек), длина которых равна l , а площадь поперечного сечения которых равна σ ; площадь перегородки, на которой в среднем встречается одно отверстие, обозначим через Σ . Если каналы неодинаковы, то l , σ , Σ следует рассматривать как характеристики среднего представителя существующих в теле каналов. Чтобы определить падение давления Δp на длине канала l , мы обратимся к уравнениям Навье—Стокса и приведем их к безразмерному виду. Для измерения координаты вдоль канала возьмем в качестве масштаба длину канала l , для поперечного масштаба — $\sqrt{\sigma}$. Масштабом скорости будет скорость протекания u , масштаб ускорения ωu , где ω — частота пульсаций потока. Эти уравнения гласят:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (5.31)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Производные $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ можно свести к производным вдоль канала ($\partial/\partial s$) и поперек него ($\partial/\partial n$). Тогда, полагая

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial s'}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial}{\partial n'}, \quad \mathbf{v} = u \mathbf{v}', \quad p = \Delta p \cdot p',$$

приведем уравнение (5.31) к виду

$$\omega l \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + u^2 \left(\frac{v'_s}{l} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial s'} + \frac{v'_n}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial n'} \right) = - \frac{\Delta p}{l\rho} \left(\mathbf{s} \frac{\partial p'}{\partial s'} + \frac{l}{\sqrt{\sigma}} \mathbf{n}' \frac{\partial p'}{\partial n'} \right) + \\ + \frac{\nu u}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}'}{\partial n'^2} + \frac{\sigma}{l^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}'}{\partial s'^2} \right), \quad (5.31')$$

где все штрихованные величины безразмерны и все они и их производные — одного и того же порядка величины; \mathbf{s}' и \mathbf{n}' суть единичные векторы вдоль и поперек канала.

Рассмотрим сначала случай, когда преобладает роль вязкости. В этом случае последний член превалирует над другими. Разделив все уравнения на $\nu u/\sigma$, мы получим, что искомый перепад давления Δp будет измеряться в единицах $l\rho\nu u/\sigma$ (мы можем взять $8\pi\rho l u/\sigma$, как это отвечает закону Пуазейля). При этом в уравнение (5.31) войдут безразмерные параметры, от которых еще может зависеть Δp , именно: $\omega\sigma/\nu$, $u\sigma/\nu l$, σ/l^2 . Таким образом,

$$\Delta p = \frac{8\pi\rho l u}{\sigma} F_1 \left(\frac{u\sigma}{\nu l}, \frac{\sigma}{l^2}, \frac{\omega\sigma}{\nu} \right), \quad (5.32)$$

где F_1 — некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от указанных параметров. Число $u\sigma/\nu l$ играет роль числа Рейнольдса и как раз определяет отношение инерционных сил к вязким. Оно мало при малых u ; но при малых u уравнение становится линейным, поэтому при малых скоростях протекания F_1 практически не зависит от $u\sigma/\nu l$. Далее, при длинных каналах ($\sigma/l^2 \ll 1$) перепад давления должен быть пропорционален длине канала l . В силу этого F_1 не должно также зависеть от σ/l^2 . Таким образом,

$$\Delta p = \frac{8\pi\rho l}{\sigma} u \psi \left(\frac{\omega\sigma}{\nu} \right) \quad \text{при} \quad \frac{u\sigma}{\nu l} \ll 1, \quad \frac{\sigma}{l^2} < 1. \quad (5.32')$$

Наконец, при малых частотах ($\omega\sigma/\nu \ll 1$) мы должны получить закон Пуазейля, так что $\psi(0)=1$. При больших $\omega\sigma/\nu$ коэффициент $\psi \approx \sqrt{\omega\sigma/\nu}$ (см., например, Крэндалл [53]). При $u\sigma/(\nu l) > 1$ силы инерции будут преобладать над вязкими, и поэтому в качестве меры давления целесообразно взять напор $\rho u^2/2$. Тогда аналогичным путем вместо (5.32) получим:

$$\Delta p = \frac{\rho u^2}{2} \frac{l}{\sqrt{\sigma}} F_2 \left(\frac{\nu l}{u\sigma}, \frac{\sigma}{l^2}, \frac{\omega\sqrt{\sigma}}{u} \right). \quad (5.33)$$

При малом значении входящих в F_2 параметров этот коэффициент будет слабо зависеть от них. Таким образом, получается квадратичный закон сопротивления. Эффект ускорения определяется теперь параметром $\omega\sqrt{\sigma}/u$.

Вычислим теперь объемную скорость Q . Она равна

$$Q = u\sigma \frac{S}{\Sigma}. \quad (5.34)$$

Подставляя отсюда u в (5.32'), получим сравнением с (5.29):

$$W_0 = \frac{8\pi u}{\sigma} \frac{\Sigma}{\sigma} \phi\left(\frac{\omega\sigma}{v}\right) \frac{l}{S} \quad \text{при} \quad \frac{u\sigma}{vl} \ll 1, \quad \frac{\sigma}{l^2} < 1. \quad (5.35)$$

Подобным же образом, подставляя u из (5.34) в (5.33), найдем:

$$W = \frac{\rho}{2} \frac{l}{\sqrt{\sigma}} \frac{\Sigma^2}{\sigma^2} \varphi\left(\frac{\omega\sigma^{3/2}S}{\Sigma Q}\right) \frac{Q}{S^2} \quad \text{при} \quad \frac{u\sigma}{vl} \gg 1, \quad \frac{\sigma}{l^2} < 1, \quad (5.36)$$

где φ — значение F_2 при малых $vl/u\sigma$ и σ/l^2 . Если частоты пульсаций невелики, то в этом случае W растет линейно с ростом объемной скорости Q . В случае $\omega=0$, по измерениям автора [54], численное значение коэффициентов ϕ и φ таково, что

$$W_0 = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\Sigma}{\sigma^2} \frac{l}{S} \frac{\Gamma}{\text{с} \cdot \text{см}^4} \quad \text{при} \quad Q < 1,5 \frac{Sl}{\Sigma}, \quad (5.37)$$

$$W = 2 \cdot 10^{-2} W_0 \frac{\Sigma}{\sqrt{\sigma}} \frac{Q}{S} \frac{\Gamma}{\text{с} \cdot \text{см}^4} \quad \text{при} \quad Q \gg 1,5 \frac{Sl}{\Sigma}. \quad (5.38)$$

Для правильного применения формул (5.37) и (5.38) следует брать

$$\sigma = ab, \quad \Sigma = (a + d)(b + d), \quad l = 2d, \quad (5.39)$$

где a , b — длины сторон отверстий, d — толщина проволок сетки или нитей ткани. Далее следует иметь в виду, что последняя формула справедлива лишь при условии $W \gg W_0$. В промежуточной области сопротивление следует рассматривать как сумму

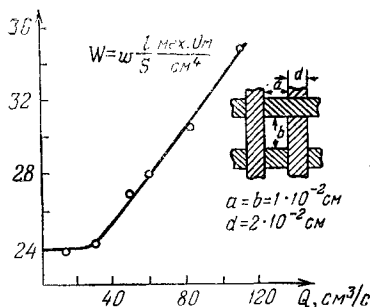
$$W' \approx 1/2(W + W_0).$$

Эта промежуточная область отвечает, как показывает опыт, значениям числа Рейнольдса $u\sigma/(vl) \approx 10$, что соответ-

ствуует указанным в (5.37) и (5.38) значениям объемной скорости Q .

На рис. 50 приведен вид сопротивления W в функции объемной скорости Q для ткани с $a=b=10^{-2}$ см, $d=2 \times 10^{-2}$ см. Предсказываемый теорией переход от сопротивления W_0 , не зависящего от скорости, к сопротивлению W , пропорциональному скорости, хорошо виден на рисунке.

Произведенный здесь расчет сопротивления ткани или сетки позволяет оценить скорость протекания воздуха u через сетчатый обтекатель¹⁾. Величина перепада давления, Δp прогоняющего воздух через сетчатый обтекатель, будет:



$$\Delta p = \beta \frac{\rho v^2}{2}, \quad (5.40)$$

Рис. 50.

причем $\beta < 1$; этот перепад давления равен:

$$\beta \rho \frac{v^2}{2} = WQ = WS \frac{Q}{S} = wl \frac{Q}{S}. \quad (5.41)$$

Величина Q/S есть как раз средняя скорость протекания v' . При $u\sigma/(vl) < 10$ удельное сопротивление wl (оно имеет размерность мех. Ом/см², а 1 мех. Ом = 1 г/с) постоянно и равно $w_0 l$. В силу этого из (5.41) находим:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\beta \rho v}{2w_0 l} \quad \left(\text{при } \frac{u\sigma}{vl} < 10 \right), \quad u = \frac{v' \Sigma}{\sigma}. \quad (5.42)$$

Отсюда видно, что, например, для ткани с $w_0 l = 10$ при $v = 5$ м/с имеем $v'/v = 3\beta \cdot 10^{-2} \ll 1$. При этом число

$$\frac{u\sigma}{vl} = \frac{v' \Sigma}{vl} = 7,5\beta \ll 10$$

¹⁾ Все эти рассуждения относятся также к протеканию воды, но численные коэффициенты в (5.37) и (5.38) будут другими.

Далее, следует иметь в виду, что ткань в воде будет набухать, так что ее размеры могут существенно изменяться.

(мы берем $\Sigma = 10^{-3}$, $l = 2 \cdot 10^{-2}$). Для больших значений $u\sigma/vl$ получаем из (5.38) и (5.41):

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{\beta p}{2\gamma}\right)^{1/2} \quad \left(\text{при } \frac{v'\Sigma}{vl} \gg 10\right), \quad (5.43)$$

где γ — коэффициент пропорциональности между удельным сопротивлением wl и скоростью v' :

$$wl = \gamma v'. \quad (5.44)$$

На основании (5.38) $\gamma = 2 \cdot 10^{-2} w_0 l \Sigma / \sqrt{\sigma}$. При тех же данных и $\sigma = 10^{-4}$ получаем:

$$\gamma = 2 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{v'}{v} = 0,17\beta^{1/2} \quad \text{и} \quad \frac{v'\Sigma}{vl} = 8 \cdot 10^{-2}\beta^{1/2},$$

так что при $v = 10$ м/с имеем: $v'\Sigma/vl = 80\beta^{1/2}$. В этом случае скорость протекания v' линейно связана со скоростью набегающего потока v . Из формул (5.42) и (5.43) следует, что мы можем добиться значительного снижения скорости внутри обтекателя при умеренных сопротивлениях (около 10 мех. Ом/см⁴) его оболочки.

Остается рассмотреть, в какой мере такая оболочка будет понижать силу звука приходящего полезного сигнала. Оказывается, что это снижение незначительно. Действительно, сопротивление в этом случае следует считать по формуле (5.35) при $\omega \neq 0$. Однако величина $\psi(\omega\sigma/v)$ и в этом случае, хотя и возрастает, но все же остается еще величиной порядка 1 (при умеренных частотах и малых σ). В силу этого можно брать значение W при $\omega = 0$. Если удельное сопротивление есть w , то падение давления звуковой волны будет

$$dp = -w dx \frac{Q}{S} = -w dx \xi,$$

где ξ — скорость колебаний. Эта величина равна $p/\rho c$, где c — скорость звука. Таким образом,

$$dp = -\frac{w}{\rho c} p dx, \quad (5.45)$$

откуда для полной толщины оболочки l получим:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{wl}{\rho c}\right). \quad (5.46)$$

Стало быть, падение интенсивности звука в децибеллах будет:

$$I \text{ (дБ)} = -20 \lg e \cdot \frac{\omega l}{\rho c} = -0,20 \omega l, \quad (5.47)$$

т. е. например, при $\omega l = 10$ мех. Ом/см⁴ всего лишь 2 дБ. Таким образом, не приходя в противоречие с звукопро-

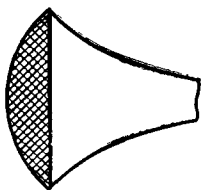


Рис. 51.

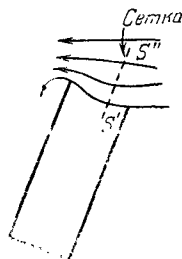


Рис. 52.

зрачностью, можно понижать скорость потока внутри обтекателя и тем самым добиться понижения частот вихреобразования и понижения интенсивности вихрей.

В связи с вопросом о сетках интересно указать на другой способ применения их для уничтожения вихреобразования. Дело заключается в том, что поток, проходящий через достаточно прозрачную сетку, становится турбулентным, при этом частоты вихрей будут определяться размерами ячейки сетки δ и скоростью потока ($f''' = \chi v / \delta$). Эти частоты могут быть столь высокими, что окажутся за пределами диапазона частот приемного устройства. Помещение такой сетки около (или вокруг) приемника не будет, конечно, защищать приемник от пульсаций давления в потоке, если он нестационарен, но вихреобразование на теле приемника будет искусственно смещено в область высоких частот f''' . Такой, например, эффект обнаруживают ветрозащитные сетки рупоров звукоулавливателей, прикрывающие их устье (рис. 51). Если бы сетка отсутствовала, то частоты вихреобразования определялись бы размерами кромок устья рупора. Сетки

перемещают спектр вихрей в сторону высоких частот. Это разбиение вихрей очень хорошо обнаруживается при возбуждении резонаторов потоком воздуха, рассмотренным нами в § 27. Если в устье такого возбужденного резонатора поместить сетку $S'S''$, пересекающую поток (рис. 52), то возбуждение резонатора тотчас прекращается, даже при очень редкой сетке (ячейки порядка 1 см^2). Таким изменением масштаба вихрей пользуются также для глушения колебаний в открытых аэродинамических трубах, помещая около отверстия трубы, откуда срываются вихри, зубцы, разбивающие эти вихри на более мелкие [50].

§ 30. Ветрозащита приемника звука от пульсаций скорости набегающего потока

Если набегающий поток не является стационарным, то возникает проблема защиты приемника звука от пульсаций давления, вызываемых нестационарностью потока. В § 28 было объяснено, что при условии, когда средняя скорость потока v много больше пульсаций скорости δv , и при условии, что размеры приемника d много меньше размеров пульсаций Λ , обтекание тела приемника нестационарным потоком можно рассматривать, исходя из знания картины обтекания для стационарного потока. Это позволяет воспользоваться важными выводами из теоремы Бернулли применительно к обтеканию тел. При обтекании тел, благодаря поджатию струи, скорость струи по боковым сторонам тела возрастает, а впереди тела и позади него она замедляется. Благодаря этому по закону Бернулли

$$p = \text{const} - \frac{\rho v^2}{2} \quad (5.48)$$

давление по боковым поверхностям тела падает, а впереди и сзади возрастает. На рис. 53 изображено распределение давлений по поверхности шара и тела хорошо обтекаемой формы. Особенно интересная картина обнаруживается у обтекаемого тела. Давление в средней части его поверхности не только отрицательно, но и очень мало по абсолютной величине. Поэтому, если поместить приемник звука в этой части тела, то изменение давления, обусло-

вленное пульсацией скорости потока, может оказаться очень малым. При подходящем выборе формы тела удалось доводить местный коэффициент β между давлением p и напором $\rho v^2/2$ до 0,02.

Заметим, что при средней скорости потока, направленной по оси обтекаемого тела, $(d\beta/d\psi)_0 = 0$, так что формула (5.13) сводится к

$$p' = \beta_0 \rho v \delta v. \quad (5.49)$$

Приемную диафрагму можно заделать заподлицо с поверхностью обтекателя в том месте, где β_0 имеет минимум,

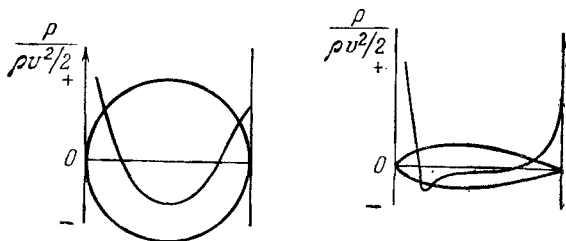


Рис. 53.

либо поместить приемник внутри обтекателя, сделав часть его оболочки звукопрозрачной. При этом звукопрозрачная поверхность должна быть весьма гладкой и мало-прозрачной для потока, иначе обтекание тела может существенно измениться.

Распределение давлений по обтекаемому телу с максимумами впереди и сзади и минимумом на боковых сторонах подсказывает еще и другой путь для борьбы с пульсациями давления, а именно принцип компенсаций давлений. Мы изложим сейчас суть этого принципа в нарочито идеализированной форме. Представим себе тело, обтекаемое потоком, вроде изображенного на рис. 53. Внутри такого тела пусть имеется камера, в которой заключен приемник давления. Пусть часть поверхностей обтекателя сделана прозрачной для потока, например, впереди, где давление положительно, и с боков, где оно отрицательно (рис. 54). При этих условиях через камеру будет продуваться поток воздуха. Обозначим нормальную к по-

верхности обтекателя скорость этого потока через v_n , разность давлений снаружи прозрачной перегородки и изнутри — через $\Delta p = p_a - p_i$. Тогда поток воздуха, проходящий через площадку ds , будет равен

$$dL = v_n ds, \quad v_n = \frac{\Delta p}{W} = \frac{p_a - p_i}{W}, \quad (5.50)$$

где W — сопротивление перегородки. Полный поток через все прозрачные части поверхности обтекателя будет:

$$L = \int v_n ds = \int \frac{p_a - p_i}{W} ds. \quad (5.51)$$

В силу несжимаемости жидкости этот поток должен равняться нулю, поэтому

$$\int \frac{p_a ds}{W} = \int \frac{p_i ds}{W}. \quad (5.52)$$

Если W постоянно, то отсюда вытекает, что среднее давление снаружи равно среднему давлению изнутри:

$$\bar{p}_a = \bar{p}_i. \quad (5.53)$$

При этом среднее взято по прозрачным частям обтекателя. Если W велико, то скорости внутри будут малы и давление p_i можно считать практически постоянным во всем

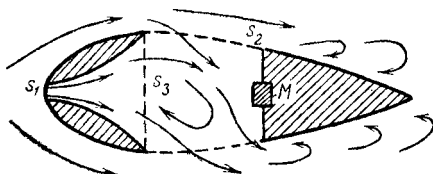


Рис. 54.

объеме. Подбирая расположение прозрачных поверхностей и их сопротивление W , пользуясь тем, что в одних местах $p_a > 0$, а в других $p_a < 0$, мы можем сделать $p_a = 0$, тогда из (5.53) следует: $\bar{p}_i = 0$. Таким образом мы приходим к камере постоянного давления.

Пример такого рода камеры изображен на рис. 54. Прозрачные для потока воздуха части обтекателя в данном

случае расположены впереди (сетка s_1) и по бокам (сетка s_2). На s_1 давление $p_a > 0$, а на s_2 давление $p_a < 0$. Третья сетка (s_3) разбивает дополнительно струю, входящую в камеру через отверстие s_1 . В этом случае удавалось доходить при указанном на рисунке расположении микрофона (M) до $\beta_0 = 0,001$, так что давление около M составляло лишь тысячную долю напора. При этом сетки оказывались еще вполне прозрачными для звука.

Заметим, что сетки важны еще и в том отношении, что, говоря акустическим языком, они представляют в основном лишь активные сопротивления, так как заключенная внутри них камера не обладает какими-либо резонансами. Если, например, сделать твердый обтекатель с малым числом отверстий, то получится резонатор типа Гельмгольца, который сильно исказит частотную характеристику приемного устройства.

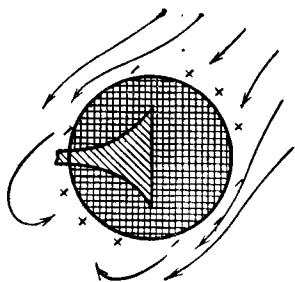


Рис. 55.

Поясненный выше принцип компенсации давлений, ведущий к созданию камер постоянного давления, частично действует во многих случаях, так сказать, сам собою. Действительно, если приемник установлен внутри обтекателя, снабженного прозрачными для потока стенками, то достаточно, чтобы часть потока входила в камеру при $p_a > p_i$ и выходила при $p_a < p_i$, чтобы хотя частично осуществлялась компенсация. Например, такая частичная компенсация будет иметь место в сетчатом обтекателе, имеющем форму шара (ср. рис. 49), на поверхности которого при достаточно густой сетке будут иметь место как положительные, так и отрицательные давления (см. диаграмму давлений на рис. 53).

В качестве примера можно указать еще на ветрозащиту приемного рупора (рис. 55), осуществленную в виде звукопрозрачного шара, заключающего внутри устье рупора. Если прозрачность такого шара для потока воздуха мала, то давления при обтекании распределяются так, как показано на рисунке знаками (+, —), и тогда будет в некото-

рой степени осуществляться компенсация пульсаций давлений, вызванная пульсациями скорости потока.

Следует, однако, иметь в виду, что все наши заключения относятся к той части пульсаций давлений, которые вызваны изменением напора. Локальные изменения скорости, как было пояснено, также приводят к пульсациям давлений вида $p'' = \rho a \frac{\partial v}{\partial t}$. Эта часть пульсаций останется и при снижении величины $p' = \beta \rho \frac{v^2}{2}$, так что она будет образовывать некоторый фон, служащий пределом понижения акустических помех, вызванных нестационарностью потока. Можно, конечно, думать, что и эту часть давления можно подвергнуть компенсации, однако для этого мы не имеем никаких рациональных данных, поскольку очень мало известно об обтекании тел нестационарным потоком. Более того, в возможности устранения помех, вызванных этой частью давления, можно сомневаться, так как они, в сущности, той же природы, что и изменения давления, вызываемые звуковой волной в неволновой зоне. Поэтому устранение таких помех, вероятно, находится в противоречии с требованием приема звука.

§ 31. Приемник звука, движущийся со скоростью, значительно меньшей скорости звука

Основная задача, с которой мы встречаемся в математической теории движущегося приемника, заключается в расчете переменного давления, обусловленного проходящей звуковой волной на поверхности приемника, в особенности его рабочей части. Такая задача включает в себя, как часть, расчет обтекания тела приемника потоком, связанный с общеизвестными трудностями.

В частности, особо непреодолимую проблему представляет вихреобразование, возникающее позади тела. Однако если тело приемника имеет удобообтекаемую форму, то по крайней мере в его передней части поток можно считать потенциальным. Если как раз в этой части расположена рабочая мембрана, то применение теории потенциального потока может оказаться вполне целесообразным. В этом параграфе мы и рассмотрим идеализированный случай потенциального обтекания при $v \ll c$.

В этом случае уравнение для потенциала звуковой волны φ , если пренебречь членами порядка v^2/c^2 , гласит [ср. (1.85)]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi + 2 \left(\frac{\nabla \Phi_0}{c^2}, \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (5.54)$$

где Φ_0 — потенциал невозмущенного звуком потока, обтекающего тело приемника ($\mathbf{v} = -\nabla \Phi_0$). Этот потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Phi_0 = 0 \quad (5.55)$$

и краевому условию

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = 0 \quad (\text{на поверхности тела}), \quad (5.56)$$

где $\partial/\partial n$ есть производная по нормали к поверхности тела. Искомый звуковой потенциал φ должен удовлетворять уравнению (5.54) и краевому условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на поверхности тела}) \quad (5.57)$$

(при этом мы игнорируем податливость мембраны). Для гармонического звука частоты ω (ω считаем в системе координат, в которой приемник неподвижен, а среда движется) можно положить $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$. Тогда из (5.54) получим:

$$\Delta \varphi_0 + k^2 \varphi_0 + 2ik \frac{1}{c} (\nabla \Phi_0, \nabla \varphi_0) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.54')$$

Допустим, что нам известен потенциал звуковой волны ψ в отсутствие потока. Тогда этот потенциал должен удовлетворять уравнению

$$\Delta \psi_0 + k^2 \psi_0 = 0 \quad (5.54'')$$

и условию $\partial \psi_0 / \partial n = 0$ на поверхности приемника. Если мы положим

$$\varphi_0 = \psi_0 \exp \left(-i \frac{k \Phi_0}{c} \right), \quad (5.58)$$

где Φ_0 — потенциал потока, то, подставляя это решение в (5.54'), мы найдем, что оно удовлетворяет уравнению (5.54'') при пренебрежении членами порядка v^2/c^2 . По-

этому (5.58) можно считать решением уравнения (5.54) с указанной точностью.

Это решение удовлетворяет и краевому условию (5.57); в самом деле,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} e^{i\omega t} = \exp \left[i \left(\omega t - \frac{k\Phi_0}{c} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial n} - \frac{ik}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \psi_0 \right\} = 0 \quad (5.57')$$

на поверхности тела, так как там $\partial \psi_0 / \partial n$ и $\partial \Phi_0 / \partial n$ равны нулю. Таким образом, если известно волновое поле ψ_0 около неподвижного приемника, то с точностью до $(v/c)^2$ поле около движущегося приемника φ_0 получается с помощью простой формулы (5.58).

В частности, если речь идет о приеме плоской волны, распространяющейся, скажем, в направлении Oz , то решение для неподвижного приемника гласит:

$$\psi_0 = Ae^{-ikz} + S(r, \vartheta, \varphi), \quad (5.59)$$

где Ae^{-ikz} есть падающая волна, S — рассеянная. Для больших r волна S должна иметь вид

$$S = \frac{B(\vartheta, \varphi) \exp(-ikr)}{r},$$

где $B(\vartheta, \varphi)$ — амплитуда рассеянной волны на большом расстоянии от тела. Она зависит лишь от углов ϑ, φ , определяющих направление рассеянного пучка. Решение для движущегося приемника будет:

$$\varphi = A \exp \left[i \left(\omega t - kz - k \frac{\Phi_0}{c} \right) \right] + \\ + S(r, \vartheta, \varphi) \exp \left[i \left(\omega t - k \frac{\Phi_0}{c} \right) \right], \quad (5.60)$$

На большом расстоянии от тела множитель $\exp(-ik\Phi_0/c)$ дает, в сущности, только учет эффекта Доплера. Действительно, возьмем для пояснения случай плоского потока, движущегося на тело со скоростью v по оси Oz . Тогда вдали от тела $\Phi_0 = -vz$ и, следовательно, фаза набегающей волны есть $[\omega t - k(1 - v/c)z]$,

Перейдем к системе координат, в которой поток покоится, $\zeta = z - vt$. В этой системе фаза волны будет:

$$\omega t - k\left(1 - \frac{v}{c}\right)z_1 = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)t - k\left(1 - \frac{v}{c}\right)\zeta,$$

и стало быть, частота равна $\omega_0 = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)$. Отсюда частота в той системе, в которой покоится тело, будет:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - (v/c)} = \omega_0\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \dots, \quad (5.61)$$

как это и должно быть по формуле для эффекта Доплера.

Вычислим теперь переменное давление на поверхности приемника. Для этого воспользуемся уравнением Бернулли, согласно которому [ср. (1.23)]

$$w = \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{[\nabla(\Phi_0 + \varphi)]^2}{2}. \quad (5.62)$$

Так как малое изменение

$$\delta w = \int \frac{p+\pi}{\rho} - \int \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho},$$

где π — звуковое давление, то для переменной части давления найдем:

$$\frac{\pi_0}{\rho} = [i\omega\phi_0 - (\nabla\Phi_0, \nabla\phi_0)] \exp\left(-i \frac{k\Phi_0}{c}\right) + \quad (5.63)$$

+ члены высших порядков.

Вдали от тела, где поток становится однородным, эта формула не дает никаких интересных результатов. Она утверждает лишь то, что давление π в системе координат, в которой тело покоится, такое же, как и в системе, в которой оно движется (для проверки этого утверждения нужно учесть эффект Доплера, в силу которого в системе координат, связанной с потоком, $\partial\varphi/\partial t = \omega_0\varphi$, а не $\omega\varphi$!).

Вблизи тела положение дел иное. В самом деле, величина ϕ_0 около поверхности тела по порядку величины равна амплитуде падающей волны A [см. (5.59)], а $\nabla\phi_0$, тоже по порядку величины, равна A/a , где a — размеры тела (речь идет о касательной компоненте $\nabla\phi_0$, нормальная равна нулю). Поэтому первый член в (5.63) примерно

равен $\approx \omega A$, а второй $\approx vA/a$. При $v/a > \omega$ давление на поверхности приемника будет определяться не первым, а вторым членом. Амплитуда потенциала A связана с амплитудой давления падающей волны формулой:

$$A = \pi_0 / i\rho\omega.$$

Следовательно, согласно (5.63) давление на поверхности приемника, обусловленное первым членом из правой части (5.63), будет $\pi' \approx \pi_0$, а обусловленное вторым $\pi'' = \frac{v}{a\omega} \pi_0$ и при $v/a > \omega$ может быть больше π' , т. е. мы приходим к своеобразному усилительному эффекту, имеющему место в движущемся приемнике, если только размеры его достаточно малы, а частота звука не очень высока. Условие наличия такого усиления может быть на основании сказанного записано в таком виде:

$$\frac{v}{c} > \frac{2\pi a}{\lambda}, \quad (5.64)$$

причем мы хотим напомнить, что $v/c \ll 1$. Таким образом, размеры приемника должны быть гораздо меньше длины звуковой волны λ .

§ 32. Приемник звука, движущийся со скоростью, превышающей скорость звука

Этот случай движения приемника представляет особый интерес и вместе с тем особые трудности для теоретического расчета. Эти особые трудности связаны с тем, что ко всем сложностям задачи об обтекании тела присоединяются еще особенности сверхзвукового движения — существование скачков уплотнения, происхождение которых мы пояснили в § 19. Здесь мы не хотим претендовать на решение поставленной задачи и ограничимся, помимо некоторых общих соображений, разбором идеализированного, простейшего случая, могущего служить отправной точкой для более подробного анализа проблемы приемника, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

Эта проблема являлась предметом неоднократных дискуссий (см., например, [34]) и различных кривотолкований: будет ли приемник вообще принимать звуковой сигнал? Будет ли существовать отраженная волна? и т. п. На самом

деле, конечно, нет никаких оснований считать, что приемник, движущийся со сверхзвуковой скоростью, не будет принимать переменного давления звуковой волны, коль скоро он попадает в ее поле. Очевидно, что он всегда будет попадать в ее поле, если только звук не исходит от источника, расположенного сзади приемника, так что звук принужден догонять приемник, а при $v > c$ догнать его не сможет.

Рассеянная приемником волна будет обладать той особенностью, что все ее поле будет лежать позади прием-

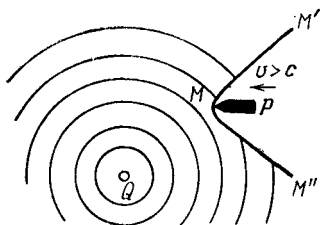


Рис. 56.

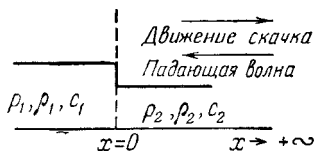


Рис. 57.

ника, в конусе Маха, и к тому же будет двойным (ср. § 20), т. е. будут два поля различных частот. Однако при сверхзвуковой скорости приемника проходящая волна, прежде чем достигнуть тела приемника, должна еще будет проникнуть через скачок уплотнения, отделяющий невозмущенную движением тела часть среды от возмущенной. Рис. 56 иллюстрирует сказанное на примере звуковой волны, излучаемой источником Q и принимаемой приемником R , движущимся со скоростью $v > c$. Кривая $M'MM''$ изображает сечение поверхности ударной волны.

В связи с этим возникает вопрос о прохождении звуковой волны через ударную волну, которая является как бы второй оболочкой приемника.

В обычных условиях наличие резкого изменения состояния среды должно было бы привести к возникновению двух новых волн — отраженной и проходящей. Между тем в нашем случае отраженная волна заведомо не может образоваться, так как скачок уплотнения движется со сверхзвуковой скоростью и несомненно обогнал бы отраженную от него волну. Некоторый свет на это «пара-

доксальное» положение дел проливает рассмотрение более простой задачи, именно — прохождение волны через плоский скачок уплотнения. Мы покажем, что в этом случае возникают две проходящие волны, из которых одна особого рода.

Пусть мы имеем прямой скачок уплотнения (ударную волну), лежащий в плоскости, параллельной плоскости $x=0$ и движущийся по направлению положительной оси Ox (рис. 57) со скоростью V . Как было пояснено в § 19, скорость V больше скорости звука в спокойной среде ($V > c_2$), в которую перемещается скачок уплотнения. Мы рассмотрим случай, когда навстречу этому скачку уплотнения распространяется плоская волна (из $x=+\infty$). Так как в скачке уплотнения имеет место скачок энтропии, то, рассматривая распространение звука в этих условиях, мы должны прибегнуть к общим уравнениям акустики неоднородной и движущейся среды (1.70), (1.71), (1.72) и (1.73). Эти уравнения для одномерной задачи, с которой мы как раз и имеем дело в нашем случае, гласят:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \delta}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + v \frac{\partial \delta}{\partial x} + \rho \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (5.67)$$

Здесь ξ — компонента скорости звуковых колебаний по оси Ox ($\xi_y = \xi_z = 0$), v — скорость среды по оси Ox ($v_y = v_z = 0$), δ , π , σ — изменения плотности газа, его давления и энтропии, вызванные звуковой волной. ∇p , $\nabla \rho$, ∇S мы отбрасываем, считая p , ρ , S постоянными по каждую сторону от скачка. Если бы энтропия среды была всюду постоянна, то, как было показано ранее (ср. § 4), $\sigma = 0$. Однако в скачке уплотнения энтропия сама меняется скачкообразно, так что нельзя считать $S = \text{const}$, и поэтому незаконно считать $\sigma = 0$ для всей среды. Разумеется, что в падающей волне, распространяющейся в спокойной среде, $\sigma = 0$, так как эту волну мы можем считать обычной адиабатической звуковой волной. Что же касается до вторичных волн, возникающих в результате взаимодей-

ствия падающей звуковой волны со скачком уплотнения, то будут ли эти волны сопровождаться изменениями энтропии или нет, может быть решено лишь на основании рассмотрения краевых условий.

Для решения нашей задачи целесообразно перейти к той системе координат, в которой скачок покоится ($x' = x - Vt$). В этой системе скорость среды равна

$$u = v - V, \quad (5.68)$$

и уравнения (5.65), (5.66) и (5.67) запишутся в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x'} = - \left(\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial x'} + \frac{h}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x'} \right), \quad (5.65')$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u \frac{\partial \delta}{\partial x'} + \rho \frac{\partial \xi}{\partial x'} = 0, \quad (5.66')$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x'} = 0, \quad (5.67')$$

причем заодно мы ввели вместо $(\partial p / \partial \rho)_s$ и $(\partial p / \partial S)_\rho$ значения

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho = h = \frac{p}{c_v}. \quad (5.69)$$

Предполагая, что падающая волна есть гармоническая волна, мы можем положить ξ , δ и σ пропорциональными $\exp [i (\omega' t + k' x')]$, где ω' — частота (в системе x'), а k' — волновое число. Для такой волны, выполняя дифференцирования в (5.65'), (5.66') и (5.67), получим:

$$(\omega' + ik') \xi = - \frac{k' c^2}{\rho} \delta - \frac{h}{\rho} k' \sigma, \quad (5.70)$$

$$(\omega' + ik') \delta = - \rho k' \xi, \quad (5.71)$$

$$(\omega' + ik') \sigma = 0. \quad (5.72)$$

Отсюда получаем два решения: либо $\sigma = 0$, либо $(\omega' + ik') = 0$. В первом случае из (5.70) и (5.71) находим:

$$k' = \frac{\omega'}{\pm c - u}, \quad \xi = \mp \frac{c \delta}{\rho}, \quad \sigma = 0. \quad (5.73)$$

Это решение представляет собой обычную адиабатическую звуковую волну, фазовая скорость которой равна $V_f = \pm c - u$, как и должно быть для движущейся среды

(если перейти к системе координат, в которой среда покоится, т. е. $u=0$, то $V_f=\pm c$), где c — адиабатическая скорость звука в рассматриваемой среде.

Второе решение (5.70), (5.71) и (5.72) гласит:

$$k' = -\frac{\omega'}{u}, \quad \xi = 0, \quad \sigma = -\frac{c^2}{h} \delta. \quad (5.74)$$

В этой волне, как мы видим, скорость звуковых колебаний равна нулю; однако имеют место изменения энтропии (σ) и изменения плотности среды (δ). Эта волна, однако, не вызывает изменений давления в среде. В самом деле, $\pi = c^2 \delta + h \sigma$. Из (5.74) следует, что

$$\pi = 0. \quad (5.74')$$

Этот вывод очевиден также и из того факта, что для рассматриваемой волны скорость $\xi=0$, так что и движущая сила должна быть равна нулю. Целесообразно назвать эту волну энтропийной. Как видно из (5.74), эта волна распространяется со скоростью, равной скорости движения среды (u), т. е., в сущности, попросту переносится средой. Таким образом, мы имеем два рода волн. На первый взгляд кажется, что мы могли бы ограничиться обычными изоэнтропичными волнами (5.73) и, имея два независимых решения, удовлетворить краевым условиям на скачке уплотнения.

На самом деле легко было бы показать, что из этих решений нельзя построить решения, удовлетворяющего начальным данным, например, представляющим ограниченный пучок волн, идущий навстречу скачку уплотнения. Напротив, в нашей задаче неизбежно прибегнуть к решению (5.74), т. е. в скачке уплотнения имеют место, как уже отмечалось, необратимые процессы, и возмущения этого скачка будут порождать колебания энтропии, которые и будут распространяться в виде волны вида (5.74).

Все это само собой получается, если обратиться к условиям на поверхности разрыва (см. § 19), заменяющим там дифференциальные уравнения гидродинамики сжимаемой жидкости. Согласно (3.103)–(3.105) эти условия гласят:

$$u_1 \rho_1 = u_2 \rho_2, \quad \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2, \quad w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}, \quad (5.75)$$

где индексы 1 и 2 относятся к среде позади скачка (1) и к спокойной среде (2) перед скачком. Напомним, что первое из этих условий выражает закон сохранения вещества, второе — импульса, третье — энергии (w — тепловая функция). При прохождении звуковой волны эти условия варьируются, так как все величины получают малые приращения (ϵ , δ , π , σ). Следует также учесть, что $u = v - V$ и что скорость движения скачка V также должна быть варьирована. Обозначим изменение этой скорости через Δ . Ограничиваясь линейным приближением, получим из (5.75) варьированные условия, которые и будут крайними условиями для звуковой волны на скачке уплотнения. Итак, заменяя в (5.75) u на $\xi - \Delta$, ρ на $\rho + \delta$, p на $p + \pi$, найдем:

$$u_1 \delta_1 + (\xi_1 - \Delta) \rho_1 = u_2 \delta_2 + (\xi_2 - \Delta) \rho_2, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} u_1^2 \delta_1 + 2(\xi_1 - \Delta) u_1 \rho_1 + c_1^2 \delta_1 + h_1 \sigma_1 = \\ = u_2^2 \delta_2 + 2(\xi_2 - \Delta) u_2 \rho_2 + c_2^2 \delta_2 + h_2 \sigma_2 \end{aligned} \quad (5.76')$$

(так как $\pi = c^2 \delta + h \sigma$); и, наконец, из третьего уравнения (5.75), если иметь в виду, что

$$\delta w = \frac{c^2}{\rho} \delta + \frac{c^2}{r} \sigma$$

(r — газовая постоянная, $p = r \rho T$), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{\rho_1} \delta_1 + \frac{c_1^2}{r} \sigma_1 + u_1 (\xi_1 - \Delta) = \\ = \frac{c_2^2}{\rho_2} \delta_2 + \frac{c_2^2}{r} \sigma_2 + u_2 (\xi_2 - \Delta). \end{aligned} \quad (5.76'')$$

В невозмущенной среде ($x > 0$, индекс 2) имеется лишь падающая волна. Для этой волны

$$\sigma_2 = 0 \quad \text{и} \quad \xi_2 = -\frac{c_2}{\rho_2} \delta_2,$$

где c_2 — адиабатическая скорость звука в невозмущенной среде. В среде позади скачка ($x < 0$, индекс 1) изменение плотности

$$\delta_1 = \delta'_1 + \delta''_2,$$

причем δ'_1 принадлежит проходящей, изоэнтропийной звуковой волне, для которой

$$\xi'_1 = -\frac{c_1}{\rho_2} \delta_1,$$

а δ''_1 принадлежит энтропийной волне, для которой

$$\xi''_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_1 = -\frac{c_1^2 \delta''_1}{h} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{r}{\rho_1} \delta''_1.$$

Пользуясь этими связями, исключим из (5.76), (5.76'), (5.76'') ξ и σ , тогда после несложных алгебраических выкладок получим:

$$(u_1 - c_1)^2 \delta'_1 + u_1^2 \delta''_1 = (u_2 - c_2)^2 \delta_2; \quad (5.77)$$

$$\left[\frac{u_1^2}{\rho_2} + \frac{c_1^2}{\rho_1} - c_1 u_1 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \delta'_1 + \left[\frac{u_1^2}{\rho_2} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{c_1^2}{\rho_1} \right] \delta''_1 = \\ = \left[\frac{u_2^2}{\rho_1} + \frac{c_2^2}{\rho_2} - c_2 u_2 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \delta_2. \quad (5.77')$$

Из условий (5.75) можно выразить величины, характеризующие состояние газа позади скачка, через отношение давлений p_1/p_2 в скачке и перед ним (см. § 19); тогда имеем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\gamma-1) + (\gamma+1) \frac{p_1}{p_2}}{(\gamma+1) + (\gamma-1) \frac{p_1}{p_2}}; \quad c_1^2 = c_2^2 \frac{p_1}{p_2} \frac{(\gamma-1) \frac{p_1}{p_2} + (\gamma+1)}{(\gamma+1) \frac{p_1}{p_2} + (\gamma-1)}, \quad (5.78)$$

$$u_1^2 = \frac{c_2^2}{2\gamma} \frac{\left[(\gamma-1) \frac{p_1}{p_2} + (\gamma+1) \right]^2}{(\gamma+1) \frac{p_1}{p_2} + (\gamma-1)}, \\ u_2^2 = \frac{c_2^2}{2\gamma} \left[(\gamma+1) \frac{p_1}{p_2} + (\gamma-1) \right], \quad (5.79)$$

причем $u_1, u_2 < 0$, и $c_2^2 = \gamma p_2 / \rho_2 = c^2$ — квадрат адиабатической скорости звука в невозмущенной среде. Мы будем считать, что перед скачком уплотнения среда покоится, так что $u_2 = v_2 - V = -V$ (скорость $v_2 = 0$).

Величина δ_2 задана амплитудой падающей волны. Поэтому из (5.78) и (5.79) можно найти δ'_1 и δ''_1 для проходящих волн. Зная эти величины, согласно (5.73) и (5.74) можно найти остальные характеристики проходящих волн. Обозначим давление в падающей волне через

$\pi_0 = c^2 \delta_2$, а давление в проходящей акустической волне через $\pi' = c_1^2 \delta_1'$ (так как $\sigma_1 = 0$). Исключая из (5.77), (5.77')

δ_1'' , получим отношение $\frac{\pi'}{\pi_0} = \frac{c_1^2}{c^2} \frac{\delta_1'}{\delta_2}$:

$$\frac{\pi'}{\pi_0} = \frac{\left(\frac{u_2}{c_2} - 1\right)^2 \left[\frac{u_1^2}{c_1^2} \frac{1}{p_2} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{p_1} \right] - \frac{u_1^2}{c_1^2} \left[\frac{u_2^2}{c_2^2} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{u_2}{c_2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \right]}{\left(\frac{u_1}{c_1} - 1\right)^2 \left[\frac{u_1^2}{c_1^2} \frac{1}{p_2} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{p_1} \right] - \frac{u_1^2}{c_1^2} \left[\frac{u_1^2}{c_1^2} \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} - \frac{u_1}{c_1} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \right]}. \quad (5.80)$$

Это отношение при малых скачках, как и должно быть, стремится к 1 и равно

$$\frac{\pi'}{\pi_0} = 1 + \frac{5}{8} \frac{\gamma + 1}{\gamma} \frac{p_1 - p_2}{p_2} + \dots \quad (5.81)$$

(при $(p_1 - p_2)/p_2 \ll 1$). При больших скачках получается:

$$\frac{\pi'}{\pi_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + 2[(\gamma - 1)/2\gamma]^{1/2}} \frac{p_1 - p_2}{p_2} + \dots \quad (5.82)$$

(здесь $(p_1 - p_2)/p_2 \gg 1$). В обоих случаях, как мы видим, звуковое давление в проходящей волне возрастает по сравнению с давлением в падающей волне. Что касается энтропийной волны, то, как мы уже указывали, ее давление равно нулю. Поэтому не столь интересно найти δ_1'' и σ_1 , как изменения температуры, которые происходят благодаря прохождению энтропийной волны. Из тождества

$$p(\rho, T) = p(\rho, S) \quad (5.83)$$

находим:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \delta + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \theta = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \delta + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \sigma. \quad (5.84)$$

Имея в виду, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{p}{\rho} = a^2,$$

где a — изотермическая скорость звука, и $(\partial p / \partial T)_\rho = p/T$, а также то, что для энтропийной волны

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \delta_1'' + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \sigma_1 = 0,$$

мы получим колебания температуры, вызванные звуковой волной, в виде

$$\theta'_1 = T_1 (\gamma - 1) \frac{\delta'_1}{\rho_1}, \quad (5.85)$$

и энтропийной

$$\theta''_1 = -T_1 \frac{\delta''_1}{\rho}. \quad (5.86)$$

Отсюда видно, что роль обеих волн будет сравнима лишь в том случае, когда δ'_1 и δ''_1 одного порядка. Если из (5.77) и (5.77') исключить δ'_1/δ_2 , то найдем δ''_1/δ_2 . При малых скачках $((p_1 - p_2)/p_2 \ll 1)$ получается:

$$\frac{\delta''_1}{\delta_2} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{p_1 - p_2}{p_2} + \dots, \quad (5.87)$$

и так как в этом случае δ'_1/δ_2 близко к 1, то энтропийная волна не играет заметной роли. В дальнейшем ее значение возрастает, с ростом скачка δ''_1/δ_2 стремится к

$$\frac{\delta''_1}{\delta_2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma - 1 + [(\gamma - 1)/2\gamma]^{1/2}}{1 + 2 [(\gamma - 1)/2\gamma]^{1/2}}. \quad (5.87')$$

Для звуковой волны

$$\frac{\delta'_1}{\delta_2} = \frac{\pi'}{\pi_0} \frac{c^2}{c_1^2}.$$

Как следует из (5.78) и (5.82), при больших скачках это отношение равно

$$\frac{\delta'_1}{\delta_2} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + 2 \left[\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2}}. \quad (5.87'')$$

Таким образом, при $(p - p_2)/p_2 \gg 1$ для обеих волн значения колебаний температуры среды позади скачка становятся одного порядка:

$$\theta'_1 = T_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{1 + 2 \left[\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2}} \frac{\delta_2}{\rho_1}, \quad (5.88)$$

$$\theta''_1 = -T_1 \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma - 1 + [(\gamma - 1)/2\gamma]^{1/2}}{1 + 2 [(\gamma - 1)/2\gamma]^{1/2}} \frac{\delta_2}{\rho_1}. \quad (5.88')$$

Из формулы (5.82) следует, что при больших скачках звуковое давление позади скачка усиливается. Отсюда, конечно, еще нельзя сделать окончательного вывода о давлении на самом приемнике звука. Можно предполагать, что и в случае сверхзвуковой скорости движения приемника будет иметь место еще и то усиление, которое было рассмотрено нами в § 29, основанное на теореме Бернулли. Однако мы не имеем возможности проанализировать подробнее эту сторону дела, поскольку обтекание тела потоком сверхзвуковой скорости представляет еще далеко не разрешенную проблему.

Рассмотренный нами очень простой случай приводит к объяснению отсутствия отраженной волны при прохождении звука через ударную волну, и нет оснований думать, чтобы эта сторона дела подверглась существенной модификации для ударных волн более сложной формы (вроде приведенной на рис. 56).

Подобное же можно сказать и о существовании двух волн позади скачка уплотнения: звуковой и энтропийной. Что касается количественных соотношений, то тот факт, что при малых скачках проходящая волна почти не возмущается скачком уплотнения, также не должен зависеть от формы ударной волны и, вероятно, имеет более общее значение, чем это непосредственно следует из рассмотренного специального случая.

ЛИТЕРАТУРА

К гл. I

1. Леонтович М. А. — ЖЭТФ, 1936, т. 6, с. 561.
2. Ackeret I. — Hd. d. Exp. Phys., 1927, Bd. 7, S. 289.
3. Умов Н. О движении энергии в телах. Диссертация. — Одесса, 1873.
4. Блохинцев Д. — ЖТФ, 1945, т. 15, с. 84.
5. Knudsen W. — J. Acoust. Soc. Amer., 1935, v. 6, p. 199.
6. Kneser G. — J. Acoust. Soc. Amer., 1933, v. 5, p. 122.
7. Konstantinow B. P., Bronstein I. M. — Sow. Phys., 1936, v. 9, p. 630.
8. Andreev N. N. — J. Phys. USSR, 1940, v. 2, p. 305.
9. Блохинцев Д. — ДАН, 1944, т. 45, с. 343.
10. Андреев Н. Н., Русаков И. Г. Акустика движущейся среды: ГТТИ, 1934.
11. Обухова А. М. — ДАН, 1943, т. 39, с. 40.
12. Блохинцев Д. — ЖТФ, 1945, т. 15, с. 71.

К гл. II

13. Блохинцев Д. — ДАН, 1944, т. 45, с. 343.
14. Emden R. — Meteorolog. Zs., 1918, Bd. 35, S. 13.
15. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes e. t. c. — Paris, 1903.
16. Чибисов С. В. — Изв. АН СССР: Сер. геофиз., 1940, № 1, с. 33.
17. Richardson H. F. — Proc. Roy. Soc., 1940, v. 33 A, p. 110.
18. Колмогоров А. Н. — ДАН, 1940, т. 26, с. 6.
19. Обухова А. М. — ДАН, 1941, т. 32, с. 29; Изв. АН СССР: Сер. геог., 1941, № 4—5, с. 453.
20. Колмогоров А. Н. — ДАН, 1941, т. 30, с. 299.
21. Брент Д. Физическая и динамическая метеорология: Гидрометиздат, 1938.
22. Красильников В. А. Диссертация: Инст. теор. геофиз. АН СССР, 1941.
23. Gedicke. — Ann. Hydrographie, 1935. Bd. 10, S. 400.
24. Findesen. — Meteorolog. Zs., 1936, Bd. 53, № 1.
25. Dahl H., Devick O. — Nature, 1937, v. 139, p. 550.
26. Stewart. — Phys. Rev., 1919, v. 14, p. 376.
27. Sieg H. — Elektr. Nachr. Techn., 1940, Bd. 17, S. 193.
28. Обухова А. М. — ДАН, 1941, т. 30, с. 611.
29. Блохинцев Д. — ДАН, 1945, т. 46, с. 136.
30. Wood A., Brown H., Cochrane C. — Proc. Roy. Soc., 1923, v. A III, p. 284.
31. Шулейкин В. В. Физика моря.

К гл. III

32. Блохинцев Д. Труды Физическ. Ин-та.
33. Непомнящий Е. А. Исследования и расчет звука возд. винта. Труды ЦИАМ: Оборонгиз, 1941.
34. Карман Т. — В сб.: Газовая динамика: ОНТИ, 1939.
35. Hugoniot H. — J. de l'Ecole Polytechn., v. 57—59, Paris, 1887, 1889.
36. Rankin I. — Phil. Trans. Roy. Soc., 1870, v. 160, p. 277.
37. Дюранд. Аэродинамика, т. III: Оборонгиз, 1939.
38. Prandtl L. — Phys. Zs., 1907, Bd. 8, S. 23.
39. Prandtl L. — Schrift. d. Deutsch. Akad. d. Luftfahrtvorsch., 1937, Н. 7.
40. Эксклагон Э. Акустика орудий и снарядов. — Л.: Изд. Военно-техн. акад. РККА, 1929.

К гл. IV

41. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика: ОНТИ, 1935, т. 2.
42. Лойцянский Л. Аэродинамика пограничного слоя. ГИТТЛ, Л.—М., 1941.
43. Boltze E. Dissert. — Göttingen, 1908.
44. Strouhal V. — Wied. Ann. 1878, B. 5, S. 216.
45. Lehnert R. — Phys. Zs., 1937, B. 38, S. 476.
46. Holle W. Akust. Zs., 1938, B. 3, S. 321.
47. Юдин Е. Я. Исслел. вихревого звука. Отчет ЦАГИ, 1942.
48. Karman T., Rubach. — Phys. Zs., 1912, B. 13, S. 49.
49. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. ОНТИ, 1937, ч. 1.
50. Стрелков С. П. Техн. отчет ЦАГИ № 85, Приемники давления и их применение, М., изд-во ВНТ, 1947.
51. Блохинцев Д. — ЖТФ, 1945, т. 15, с. 63.
52. Гутин Л. Я. — ЖТФ, 1937, т. 7, с. 1096.

К гл. V

53. Крендалл. Акустика. Л., 1934.
54. Блохинцев Д. — ЖТФ, 1942, т. 12, с. 484.
55. Блохинцев Д. — ДАН, 1945, т. 47, с. 22.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебательная система 160
Авторезонанс 160
Акустика геометрическая 44
и д.
Акустическая пеленгация 64,
176
Акустические помехи 143, 174,
188
Акустические фединги 70, 71
Атмосфера изотермическая 51
— реальная 54
Атмосферы турбулентность
56 и д.
Аэродинамическая труба 159,
184

Баллистическая волна 123—
126

Бинауральный эффект 64
Больтце метод 130

Вектор Умова 12
Ветровая помеха 159
Ветрозащита 176 и д., 184 и д.
— звукоулавливателей 183
Вихревой звук 100, 127 и д.,
149 и д., 156 и д.
Вихрей цепочка 130, 139, 140
Вихреобразование 127 и д.,
169 и д., 176 и д.
Волна баллистическая 123—
126
— дульная 123—126
— ударная 123

Гельмгольца резонатор 159,
164, 168, 187
Гидрофон 169
Гюгоньо соотношение 113

Давление звуковое 47—51
Диафрагма приемная 185
Диссипативная функция 13
Доплера эффект 36, 96 и д.,
119, 154
Дорожка Кармана 130, 136
и д., 143, 144, 149 и д.

«Закон 2/3» 62
Законы сохранения в аэро-
динамике 9—11
Затухания коэффициент 70,
74—77
Звук (колебания звуковые) 16
— винта самолета 99, 127
— — — вихревой 156 и д.
— вихревой 100, 127 и д.,
149 и д.
— вращения 100, 158
— выстрела 124
Звуковая тень 55
Звукоулавливатель 183
Звучание проводов 127
Зона молчания 55

Излучение дипольное 153
Инфразвук 16
Источник звука движущийся
84 и д.
— — дипольный 89

Камера постоянного давления
186—187

Кармана дорожка 130, 136
и д., 143, 144, 149 и д.

Кармана—Рубаха теория 136
и д.

Квазипотенциал 33

Кирхгофа теорема 38 и д.

Колебания звуковые (звук) 16

Конус Маха 116—119, 121,
193

Красильникова опыты 64 и д.

Линейности колебаний усло-
вие 16

Лучевая скорость

— трубка 50

Маха конус 116—119, 121, 193

— угол 110

— число 135

Метод Больтце 130

Молчания зоны 55

Обтекатель звукопрозрачный
177 и д., 187

— сетчатый 178 и д.

Обухова и Колмогорова закон
62

Обухова уравнение 33—34

Пеленгация акустическая 64,
176

Поглощение звука 18—20

Пограничный слой 128

— —, точка отрыва 130

Показатель преломления зву-
ковых волн 46, 52

Полутеневой метод фотографи-
рования 121

Помехи акустические 143, 174,
188

Потенциал звукового давления
33

— звуковой волны 23

Потенциал скоростей комплек-
сный 137

— — сферических волн 37

— скорости звуковых колеба-
ний 33

Псевдозвук 143 и д., 169 и д.

Пульсации скоростей потока
184 и д.

Разрывы слабые 50, 56

Распространение звука 26 и д.,
44 и д., 77 и д.

Рассеяние звука 70 и д.

Резонатор Гельмгольца 159,
164, 168, 187

Резонаторы 159

—, возбуждение потоком 158
и д.

Рейнольдса число 128, 169,
179

Скачок уплотнения 108 и д.,
120 и д., 123, 193

Скоростей пульсации 184 и д.

Скорость лучевая 50

— распространения слабых
разрывов 50, 56

— фазовая 47, 50

Струхала коэффициент 132,
142

— формула 131—133, 169

— частота 131—133

Тензор деформаций 11

— напряжений 10

Тень звуковая 55

Теорема Кирхгофа 38 и д.

Теория Кармана—Рубаха
136 и д.

Тепловая функция 14, 113

Трубка лучевая 50

Турбулентности минимальный
масштаб 72

Турбулентность атмосферы 56
и д.

Турбулентный шум 175—176

- Угол Маха 110
 Ударная волна 108, 123, 193
 Ультразвук 16, 20
 Уравнение Андреева и Руса-
 кова 33
 — Навье—Стокса 128
 — Обухова 33—34
 — эйконала 46
 Уравнения геометрической
 акустики 44 и д.
 Усилительный эффект 192
- Фазовая скорость 47, 50
 Фединги акустические 70, 71
 Флюктуации фазы звуковой
 волны 64 и д.
 Формула Струхала 131—133,
 169
- Функция диссипативная 13
 — тепловая 14, 113
- Цепочка вихрей 130,
- Частота Струхала 131
 Число Рейнольдса 1:
 179
- Эйконала уравнение 4
 «Эолова арфа» 127, 133
 Эффект Доплера 36, 1:
 119, 154
 — усилительный 192

Дмитрий Иванович Блохинцев

АКУСТИКА НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

М., 1981 г., 208 стр. с илл.

Редактор *В. А. Григорова*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *М. Л. Медведевская*

ИБ № 2178

Сдано в набор 21.11.80. Подписано к печати 23.04.81. Т-05768. Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32}$.
Тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,92.
Уч.-изд. л. 10,45. Тираж 4700 экз. Заказ № 22.
Цена книги 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени

Первая типография издательства «Наука»

199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12